Hans Ruegg

Matemática activa

para familias educadoras y escuelas alternativas

Secundaria I

12 a 15 años

Se ofrecen los siguientes libros de "Matemática Activa ...":

Pre-Matemática (4 a 6 años aprox.) - con hojas de trabajo incluidos.

Primaria I (6 a 9 años aprox.)

Primaria I, Libro de trabajo

Primaria II (9 a 12 años aprox.)

Primaria II, Libro de trabajo

Secundaria I (12 a 15 años aprox.)

Secundaria II (Pre-universitario)

Matemática Divina (Complemento para educadores)

Edición provisional de pre-impresión

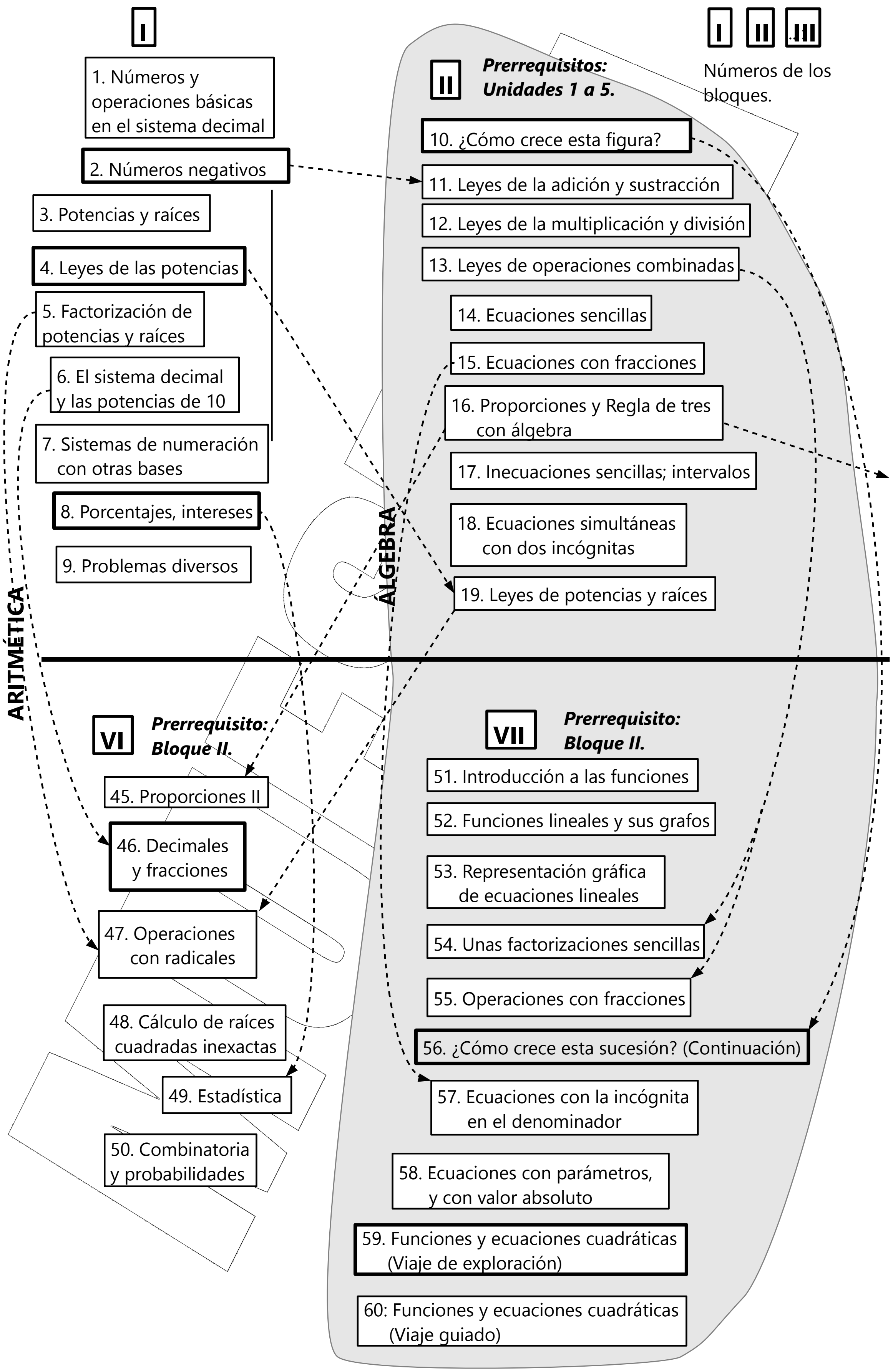
Contacto por internet para consultas:
https://educacionCristianaAlternativa.wordpress.com/libros-de-matematica-activa/

Foro de discusión para usuarios de este libro, y otros interesados:
https://homeschoolperu.com/foro

Unas demostraciones en video de los métodos de la matemática activa se encuentran en los cursos por internet de "Matemática Activa", accesibles en:
https://homeschoolperu.com
http://www.youtube.com/user/educadorDiferente

Índice de contenido

Mapa temático de las



unidades de aprendizaje

III
Prerrequisito: Bloque II.

GEOMETRÍA

20. Rectas, ángulos, y triángulos
21. Unas propiedades de cuadriláteros
22. El lugar geométrico
23. Círculos y rectas
24. Grados, minutos y segundos
25. Ángulos en un círculo
26. Recortables de cartulina – Objetos redondos
27. Líneas notables en triángulos
28. Polígonos
29. Semejanza geométrica

VIII
Prerrequisitos: Bloques III y VII.

61. Convertir áreas como los antiguos griegos
62. Cálculo de áreas
63. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo
64. Más sobre círculos, cuerdas, secantes y tangentes
65. El pentágono regular y la proporción áurea
66. Puntos, rectas y planos en el espacio
67. Ángulos y distancias en el espacio
68. Recortables de pirámides
69. Volúmenes y áreas de cuerpos geométricos
70. La esfera; coordenadas geográficas
71. Unas relaciones métricas en cuerpos geométricos
72. Dibujo geométrico de objetos tridimensionales
73. El primer libro de Euclides

IV
Prerrequisito: Bloque II.

TEORÍA DE NÚMEROS

30. Clasificación de los números
31. Congruencia modular
32. Reglas de divisibilidad y la congruencia modular
33. Múltiplos y divisores comunes – Enfoque técnico
34. Múltiplos y divisores comunes – Enfoque profesional
35. Ecuaciones diofánticas lineales
36. Otros temas relacionados con múltiplos y divisores
37. Investigaciones y problemas diversos

V RAZONAMIENTO ETC.

38. Teoría de conjuntos
39. Lógica proposicional
40. Otras situaciones de lógica sistemática
41. Autómatas celulares
42. Análisis de juegos
43. Computación: Calcular con PARI
44. Computación: Programación con PARI

IX

74. Problemas de repaso

= Temas con un fuerte componente de investigación propia.

= Temas con proyectos prácticos o artísticos.

= Temas opcionales, según los currículos usuales de secundaria.

Las flechas conectan temas que corren en paralelo, pero que no necesariamente se deben tratar seguidos.

Los Bloques III a VII se pueden trabajar en cualquier orden, porque no dependen entre sí.
Sólo requieren conocimientos de los Bloques I y II.
Excepciones se indican al inicio de cada Unidad.

Introducción para educadores

¿Qué hacer con alumnos que vienen desde el sistema tradicional?

Si los alumnos usaron los métodos escolares tradicionales durante su etapa de primaria, la transición a los métodos de este libro puede ser un poco difícil. Puede que esos alumnos no hayan tenido la oportunidad de desarrollar ciertas habilidades y actitudes que son esenciales para beneficiarse de los métodos activos. Por ejemplo:

Plantear preguntas propias. – Los alumnos del sistema tradicional a menudo se acostumbran a que el sistema (o el profesor) hace las preguntas, y también dicta las respuestas. Así que la resolución de problemas se reduce a repetir las respuestas o "recetas" que ya se dieron anteriormente a problemas similares.
El aprendizaje activo, en cambio, anima a los alumnos a plantear preguntas propias. Ya que no existe un currículo estrictamente determinado, el aprendizaje puede seguir el camino señalado por las preguntas de los alumnos.
Por ejemplo, unos alumnos se proponen como proyecto, construir de cartulina unos modelos de aviones a escala. Descubren que para cierto modelo necesitan construir un cilindro cortado de manera oblicua. Entonces surgen las preguntas: ¿Qué figura geométrica forma el corte? ¿Cómo se la puede construir con exactitud? ¿Y qué forma tiene la línea de corte en el cilindro desenrollado? ¿Cómo se la puede construir? – Las respuestas completas (Elipse y función seno) conducen a temas más allá del "currículo oficial" para esta edad. *(En la serie presente de libros, se tratan en el tomo de Secundaria II.)* Pero puesto que los alumnos están motivados por su propio interés, no hay problema en anticipar algunos de estos temas para responder a sus preguntas. No necesitamos limitarnos por un currículo prediseñado.

Curiosidad investigadora. – Los niños son curiosos por naturaleza. Quieren investigar, experimentar, descubrir ... El sistema escolar convencional a menudo apaga esa curiosidad, porque obliga al alumno a memorizar respuestas a preguntas que nunca hizo, y en cambio le impide investigar las preguntas que sí le interesan. Así que un alumno del sistema convencional, si quiere volver a un método activo, necesita "desenterrar" su curiosidad perdida.
En el campo de la matemática podemos contribuir a eso, señalando unas propiedades sorprendentes de los números, o unos "trucos" con métodos o resultados inesperados. Eso puede animar nuevamente al alumno a admirarse, a preguntar y a investigar: ¿De dónde viene eso? ¿***Por qué*** es eso así? (Recordemos que la pregunta más importante en la matemática es el ***por qué***.) – Así podemos devolver a la matemática un elemento de suspenso, sorpresa, y hasta de "aventura". Diversos problemas de investigación en este libro pueden ayudar para este fin.

Relacionar los conceptos matemáticos con situaciones y objetos concretos. – Los alumnos que en la etapa de Primaria aprenden con métodos activos, adquieren muchas experiencias prácticas con los conceptos matemáticos: Miden y pesan objetos; construyen figuras geométricas; hacen negocios, comparan precios y llevan una contabilidad; etc. Los alumnos que pasaron la primaria en el sistema convencional, pueden tener necesidad de hacer tales experiencias, antes que puedan proseguir a los conceptos más abstractos de la matemática.

Creatividad. – Al solucionar un problema novedoso, necesitamos creatividad para inventar y probar diversos caminos posibles, hasta encontrar uno que "funciona". Los métodos convencionales a menudo desaniman esa creatividad, porque insisten en que el alumno use el procedimiento prescrito por el libro o por el profesor. Hay que devolver a los alumnos la libertad de imaginar y probar soluciones novedosas. Puede ser más fácil, hacer eso primero en el campo del arte. Incentivemos a los alumnos a crear obras de arte propias, que no estén limitadas por muchas condiciones establecidas de antemano. Después les será más fácil, "trasladar" su creatividad redescubierta al campo de la matemática.

Aprendizaje colaborativo. – El sistema convencional pone mucho énfasis en la competencia: quien es el más rápido, quién saca la mejor nota, etc. El aprendizaje activo funciona mejor en un ambiente de colaboración mutua: donde los alumnos que saben más, ayudan a los que saben menos; o donde un grupo de alumnos se une para investigar *juntos* algún problema matemático. Para alumnos que vienen del sistema convencional, puede ser un desafío, acostumbrarse a un tal ambiente de colaboración. Trate de juntarlos con unos alumnos bien motivados que ya están acostumbrados a los métodos activos; ellos pueden hacer el papel de mentores para los alumnos "nuevos".

Estudio independiente. – Por el otro lado, los métodos activos incentivan a los alumnos también a ocuparse durante bastante tiempo con un material o un problema, sin ser constantemente "arreados" por un adulto. Los alumnos que vienen del sistema convencional, podrán necesitar bastante tiempo para desarrollar la iniciativa propia que es necesaria para trabajar y estudiar de esta manera independiente.
 - A los alumnos que vienen del sistema convencional, tenemos que brindarles un ambiente que les facilita adquirir estas habilidades y actitudes mencionadas. Unas pautas ya se dieron en las descripciones anteriores. Otras estrategias posibles son:

Deles un tiempo de "desintoxicación".
En el área de la matemática, eso significa que permitimos al alumno por algún tiempo no hacer nada de matemática, excepto si el alumno por sí mismo lo desea. Eso es particularmente importante para alumnos que sufrieron alguna forma de "trauma matemático", y asocian la matemática con experiencias dolorosas o de fracaso.
Como regla general, se dice que se necesita aproximadamente un mes de "desintoxicación" por cada año que uno pasó dentro de un sistema inadecuado. Por tanto, un alumno que pasó toda su primaria en el sistema convencional, puede necesitar más de seis meses hasta que podrá asimilar los métodos nuevos.
Los alumnos pueden aprovechar este tiempo de "desintoxicación" para hacer cosas que les gustan y que en el sistema convencional no se valoran mucho, tales como trabajos manuales y artísticos, deportes, aprender nuevos juegos, actividades que fomentan el compañerismo con otros alumnos, acompañar a personas adultas en sus trabajos, etc. Así recuperarán su desarrollo en algunas áreas que se descuidaron anteriormente. Es posible que algunos alumnos necesiten bastante tiempo hasta que logren descubrir sus intereses y talentos genuinos.

Trabajen primero con el libro de Primaria II.
Las actividades del libro de Primaria II permiten a los alumnos adquirir los prerrequisitos necesarios para el nivel de Secundaria, usando métodos activos. Aunque ese libro indica que es para alumnos de "9 a 12 años *aproximadamente*", eso no significa que sus actividades estén por debajo del nivel de un alumno de 13 ó de 15 años. Varios de sus problemas de investigación presentan un desafío fuerte aun para alumnos de secundaria, e incluso para muchos adultos. Algunos temas de ese libro casi no se tratan en el sistema convencional, así que de todos modos serán nuevos para los alumnos: Efectuar construcciones geométricas; analizar juegos de estrategia; realizar investigaciones propias; y otros. Otros temas son conocidos, pero se introducen con un enfoque más práctico y concreto; por ejemplo las operaciones básicas con números grandes. Así, los alumnos podrán acostumbrarse a los métodos activos, sin tener que aprender al mismo tiempo unos conceptos matemáticos nuevos.
La mayoría de los programas convencionales avanzan demasiado rápido en el nivel de Primaria. Introducen temas avanzados, tales como expresiones algebraicas, ecuaciones, potencias y raíces, etc, que la mayoría de los alumnos de primaria todavía no pueden entender. En cambio, tratan los conceptos fundamentales de manera muy breve y muy teórica, y así los alumnos los vuelven a olvidar. Como resultado, muchos alumnos entran al nivel de Secundaria sin cumplir los prerrequisitos básicos, tales como saber las tablas de multiplicación, saber efectuar una división larga correctamente, o entender las propiedades básicas del sistema decimal y de las fracciones.
Para tales alumnos será beneficioso, trabajar primero *todos* los temas del libro de Primaria II – con excepción del último bloque (VIII), cuyos temas se repiten en el tomo presente. Eso no significa que tengan que llevar a cabo todas las actividades sugeridas. Será suficiente que hagan en cada unidad o tema tantas actividades como sea necesario para dominar el tema, escogiendo aquellas actividades que son de mayor ayuda para ellos. Tenemos la ventaja de que muchos alumnos están ahora en una etapa donde comienza a despertar su razonamiento abstracto, y eso les permitirá comprender muchos conceptos matemáticos mejor y más rápidamente que cuando eran alumnos de primaria. Por tanto, para la mayoría de estos alumnos debería ser posible trabajar los temas del libro de Primaria II dentro de un año aproximadamente. Y cuando lo hayan terminado, *entendiendo* lo que hacen, estarán al nivel de un alumno promedio del 7º o incluso del 8º año del sistema convencional; excepto unos cuantos temas como el álgebra, que se pueden introducir posteriormente.
Aquellos alumnos que dominan bien las operaciones básicas, podrán limitarse a aprender brevemente las técnicas del ábaco y/o del material de canje, y por lo demás pasar por alto los Bloques I y III del libro de Primaria II. Se recomienda que sí hagan los experimentos e investigaciones relacionados con múltiplos y divisores (Bloque II), unas actividades con el material de fracciones y las investigaciones relacionadas (Bloque IV), las investigaciones acerca de los números decimales (Bloque V), que practiquen unas construcciones geométricas (Bloque VI), y hagan unas investigaciones adicionales (Bloque VII). Después de eso deben estar en las condiciones de comenzar con el tomo presente sin mayores dificultades.
Durante este proceso de transición, los alumnos del sistema convencional pueden reaccionar de distintas maneras a esos métodos "nuevos". Vea el apartado ***"Desaprender para volver a aprender"*** en el libro de Primaria II, p.19.
Si usted mismo(a) nunca trabajó con los libros de Primaria de esta serie, por favor lea también la "Introducción pedagógica" del libro de Primaria II. Allí encontrará explicaciones adicionales acerca del uso de estos métodos, y unas pautas pedagógicas adicionales.

¿Cómo usar las unidades de aprendizaje en este libro?

Viajes guiados, investigaciones, y viajes de exploración

Si deseas conocer un territorio nuevo, hay varias maneras de hacerlo. Puedes lanzarte a la aventura y explorar los caminos por cuenta propia. O puedes conseguir un mapa y explorar el territorio con la ayuda del mapa. O puedes contratar un guía y seguirle por donde él camina. Cada forma tiene sus propias ventajas y desventajas.

Lo mismo para los nuevos "territorios matemáticos". Puedes investigar por tu cuenta, o puedes dejarte guiar por alguien. Este libro provee desafíos de ambas clases.

Muchos temas se introducen en la forma de un "***viaje guiado***": El libro te explica los principios, presenta quizás unas demostraciones de *por qué* eso es así, te enseña unos procedimientos, y te da unos ejercicios para aplicarlos.

Otros temas aparecen dentro de un ***desafío de investigación***. En un problema de investigación, no puedes simplemente aplicar un procedimiento y llegar a un resultado. Primero tienes que descubrir las leyes y propiedades matemáticas que están "escondidas" dentro del problema. Y probablemente tienes que inventar tus propios procedimientos para llegar a la solución. En algunas investigaciones no sabrás cuál es realmente su "tema", hasta que hayas descubierto la respuesta.

Esta es una forma más exigente de aprender matemática. Requiere mayor esfuerzo; pero también te provee la emoción de explorar lo desconocido. Y cuando llegues a la solución, no la olvidarás tan pronto, porque fue tu propio descubrimiento.

Algunas investigaciones más largas se llaman "***Viajes de exploración***". Un viaje de exploración abarca un tema mayor, y contiene diversos problemas de investigación seguidos. Por ejemplo, encontrarás viajes de exploración acerca de las leyes que gobiernan las potencias; acerca de las reglas de divisibilidad; acerca de las áreas de figuras geométricas; acerca de las ecuaciones cuadráticas; y otros. Algunos de esos viajes te cuentan también algo acerca de la historia de los primeros descubridores de esos temas.

En algunas Unidades ***podrás elegir*** entre un viaje guiado y un viaje de exploración. Si eres valiente y te gusta razonar por ti mismo(a), elige el viaje de exploración. Si te sientes inseguro(a) y necesitas instrucciones paso por paso, elige el viaje guiado. – O puedes elegir una forma intermedia: Comienza con el viaje de exploración y avanza hasta donde puedes. Si te quedas en algún lugar y no tienes más ideas de cómo seguir, puedes saltar al viaje guiado. Éste te explicará los temas que se pueden descubrir en el viaje de exploración. Cuando hayas recuperado tu ánimo, podrás volver al viaje de exploración.

Cómo hacer una investigación matemática

- Primero y ante todo, ***toma suficiente tiempo***. Una investigación matemática no es una carrera a tiempo. Al contrario, requiere reflexionar profundamente. Puede ser necesario que el tema dé vueltas en tu mente durante varios días o incluso semanas. Y entonces puede suceder que la solución te llegue en el momento menos esperado: en una noche antes de dormir, o al trabajar en la cocina, o al hacer deporte.

Así le sucedió a Arquimedes, cuando tenía un problema difícil: El rey Hieron lo había encargado con descubrir si su corona era de oro puro; pero sin dañar la corona de ninguna manera. Un día, cuando Arquimedes estaba sentado en la bañera, repentinamente se le ocurrió la solución (la ley del empuje, que hasta hoy se llama "el principio de Arquimedes"). La historia cuenta que Arquimedes se emocionó tanto, que corrió a la calle, desnudo como estaba, y gritó: "¡Heureka! ¡Heureka!" (¡Lo encontré!)

Keith Devlin, profesor de matemática en la Universidad de Stanford, dice:

> "Nosotros los matemáticos profesionales nos desesperamos por los sistemas escolares, que imponen estrechos límites de tiempo sobre los exámenes de matemática, y obligan a trabajar rápidamente. *La verdadera matemática requiere tiempo.*"

- Muchas investigaciones piden examinar las propiedades de cierta clase de números; por ejemplo múltiplos de 11; cuadrados perfectos; números primos; etc. En estos casos se recomienda primero ***coleccionar ejemplos***. Estudia estos ejemplos detenidamente: ¿Qué se puede hacer con ellos (matemáticamente)? ¿Cómo se "comportan" los números? Probablemente harás unas observaciones interesantes.

- Otros problemas requieren que primero entiendas bien la situación. Para eso puede ayudar hacer ***dibujos, diagramas***, etc, y "jugar" con los datos que tienes.

- ***Usa tu creatividad***. Intenta diversos caminos para encontrar una solución o explicación. En temas con números, puedes intentar hacer nuevas operaciones con los números, que todavía no hiciste. En temas geométricos, unas líneas auxiliares pueden revelar nuevas propiedades. Si un camino no lleva a la meta, intenta otro.

- ***Ordena y sistematiza*** tus observaciones: ¿Dónde observas características similares? ¿Puedes distinguir distintos casos? ¿Qué efectos tienen determinados cambios en los datos? Etc.

- Pregunta ***por qué***. ¿Por qué se comportan los números de la manera como lo observé? ¿Por qué no de otra manera? Intenta encontrar explicaciones lógicas.

- ***Haz preguntas propias***. El libro te guía con algunas preguntas de investigación, pero ésas no abarcan el tema completo. Si amplías el tema con preguntas propias, puedes hacer descubrimientos nuevos.

- ***Ayúdense unos a otros***. Si hacen la investigación en equipo, compartan sus ideas. No tengan miedo de decir algo equivocado; respeten los esfuerzos de todos. Aun una idea equivocada puede contribuir a que más adelante encuentren el camino correcto.

- Por el otro lado, recuerda que una investigación matemática significa llegar a la respuesta mediante el ***razonamiento propio***. Si es un tema conocido, y encuentras la respuesta en alguna otra fuente de información (libros, profesores, internet), entonces quizás sabes la respuesta, pero no la entenderás con la misma profundidad como si lo hubieras razonado tú mismo(a).

Presenta tus resultados ante un público

Busca de vez en cuando una oportunidad de presentar ante otras personas tus resultados de una investigación. El "público" no necesitan ser muchos; puede ser tu familia, o unos amigos, vecinos, o compañeros. Eso te va a desafiar a expresar tus razonamientos claramente, de manera que otras personas pueden entenderlos.

Escribe con anticipación un resumen en pocas palabras, de lo que vas a exponer. Eso te ayuda a mantener el orden durante la exposición.

Usa unos medios visuales para ilustrar tus explicaciones: fórmulas, diagramas o dibujos en la pizarra; una presentación de diapositivas en computadora; o incluso un modelo hecho de cartulina o madera.

Si hay niños de primaria en tu público, tienes un desafío adicional: ¿Puedes explicar tus razonamientos de una manera que ellos también pueden entender?

Escribe un reporte de investigación

En este nivel es bueno que practiques también expresarte por escrito. Eso te obliga a ordenar bien tus pensamientos.

Un reporte de investigación matemática normalmente contendrá estas partes:

1. Una descripción del ***problema*** que investigaste. Si es un problema del libro, puedes simplemente copiar o resumir la(s) pregunta(s) del libro. Si es un problema que tú mismo planteaste, explica con claridad qué es lo que se requiere descubrir.

2. Una colección de ***ejemplos***; por ejemplo números que cumplen las propiedades particulares que la investigación pide.

3. Una descripción de ***observaciones*** interesantes que se pueden hacer en los ejemplos: propiedades llamativas, regularidades, etc.

4. Una ***explicación o fundamentación*** de las observaciones. En el mejor caso, podrás presentar aquí una demostración matemática de una o varias propiedades que descubriste. De otro modo, puedes simplemente explicar por qué crees que aparecen las propiedades que observaste, aun si no puedes fundamentar lógicamente por qué. (En este caso, eso se llama una *conjetura* o *tesis*.)

5. ***Conclusiones***. Resume brevemente los resultados más importantes de la investigación: Fórmulas, procedimientos o leyes matemáticas descubiertas; soluciones de un problema específico; etc.

Si la investigación abarca varios problemas o preguntas, habría que repetir estas partes para cada problema.

Si conoces a alguien que tiene buen entendimiento de matemática, puedes pedir a esa persona que revise tu reporte y te dé sugerencias de cómo mejorar. También puedes presentarlo en el foro de discusión:

https://homeschoolperu.com/foro

Ejemplo de un reporte de investigación:
"Diferencias de números al revés"

Problema: Escribe un número de tres cifras. Después escribe el mismo número con las cifras en orden invertido. Calcula la diferencia entre los dos números.

Haz lo mismo con algunos otros números de tres cifras. Investiga los resultados. ¿Qué propiedades comunes tienen todos los resultados? ¿Puedes explicar el *por qué* de estas propiedades? ¿Puedes establecer una regla para predecir los resultados?

Mario, un alumno que todavía no aprendió álgebra, escribió el siguiente reporte:

"Ejemplos:

872	462	743	601	943	933	923
−278	−264	−347	−106	−349	−339	−329
594	198	396	495	594	594	594

Mis observaciones:
Todos los resultados tienen un 9 en el medio. Las otras dos cifras siempre suman 9.

Explicación:
En las decenas siempre se resta la misma cifra. Eso daría cero. Pero desde las unidades siempre nos prestamos 1. Por eso da 9, y otra vez tenemos que prestarnos 1. Por eso siempre hay un 9 en las decenas.
En las unidades se restan las mismas cifras como en las centenas, pero al revés. Tenemos una diferencia de centenas, y de eso restamos la misma diferencia en las unidades. Por ejemplo si la diferencia de centenas es 5, tenemos 500 – 5 = 495.
Hay solamente 9 resultados distintos, uno para cada diferencia de centenas.

Regla:

Si conocemos la diferencia de las centenas, podemos calcular el resultado entero. La diferencia de las centenas es la diferencia entre centenas y unidades en el primer número.

Comentarios del experto acerca de este reporte:

Es un reporte bastante bueno; aunque unos detalles se pueden mejorar.

Los ejemplos son bien escogidos. Al inicio, Mario prueba combinaciones muy diversas. Los últimos ejemplos, en cambio, se distinguen únicamente en las decenas, y sus resultados son iguales. (Hubiera sido bueno señalar eso en "Mis observaciones".)

Las explicaciones y la regla son bastante bien expresadas. Solamente falta claridad en lo siguiente: Donde Mario dice "centenas" o "diferencia de centenas", ¿se refiere al valor absoluto de la cifra (por ejemplo 5), o a su valor posicional (por ejemplo 500)? – Fue bueno añadir un ejemplo con números; eso ayuda a aclararlo.
Mario usó la expresión "diferencia de centenas" como un nuevo término técnico para explicar su teoría. Eso es permitido y es útil, si es que se explica y define claramente el significado del nuevo término. Los matemáticos inventan términos técnicos todo el tiempo, cuando investigan y describen un tema nuevo.

Un detalle se le escapó a Mario: Si tenemos "cien veces la diferencia de las centenas", y de eso restamos "una vez la diferencia de las centenas", entonces el resultado es exactamente 99 veces la diferencia de las centenas. Por tanto, el resultado es siempre la diferencia entre las cifras de centenas y unidades, multiplicada por 99.

En su "Regla", Mario dice que "podemos calcular el resultado entero". Pero no explica *cómo* se puede calcular. Aunque no descubrió que es la "diferencia de las centenas" multiplicada por 99, pero podría haber escrito algo similar a esto:

"En el resultado, la cifra de las unidades es 10 menos la diferencia de las centenas; la cifra de decenas es siempre 9, y la cifra de las centenas es la diferencia de las centenas menos 1."

- Un(a) alumno(a) ***con conocimientos de álgebra*** *podría haber escrito una explicación como esta:*

"El número original puede escribirse como
100a + 10b + c.
(***a, b, c*** significan las cifras del número.)
Este número al revés es ***100c + 10b + a***.
Entonces la diferencia es:
(100a + 10b + c) – (100c + 10b + a)
= 100a + 10b + c – 100c – 10b – a
= 99a – 99c
= 99(a–c),
o sea 99 multiplicado por la diferencia entre las cifras ***a*** y ***c***."

Unidad 6 - El sistema decimal y las potencias de 10

Prerrequisitos:
- Concepto del valor posicional en el sistema decimal *(Primaria II; y Unidad 1 en este libro)*.
- Operaciones con números decimales *(Primaria II)*.
- Leyes de las potencias *(Unidades 4 y 5)*.

Materiales necesarios:
- Material de canje para el sistema decimal: Bloques en Base 10, tapas de botellas o fichas de cartulina con valores posicionales asignadas, etc.
- Alternativamente: Ábaco.

TALLER

Las potencias de 10 en el tablero posicional

Recuerda cómo funciona el tablero posicional: Cada vez que pasamos una posición hacia la izquierda, los valores posicionales se multiplican por 10. Entonces se forma la sucesión de las potencias de 10. En vez de escribir "Unidades", "Decenas", "Centenas", etc, podemos rotular el tablero posicional así:

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
4	0	6	5	2	0	8

Anteriormente hemos explicado el valor del número 4'065'208 de la siguiente manera:

4'065'208 = 4 x 1'000'000
+ 0 x 100'000
+ 6 x 10'000
+ 5 x 1000
+ 2 x 100
+ 0 x 10
+ 8 x 1

Ahora escribimos lo mismo con potencias de 10:

4'065'208 = 4×10^6
$+ 0 \times 10^5$
$+ 6 \times 10^4$
$+ 5 \times 10^3$
$+ 2 \times 10^2$
$+ 0 \times 10^1$
$+ 8 \times 10^0$

Para hacer: Si ya tienes un tablero posicional grande en cartulina, añade las potencias de 10 para marcar los valores posicionales correspondientes. Si no lo tienes, fabrica uno nuevo. Alternativamente, puedes dibujar el tablero posicional con tiza en la mesa, o en una pizarra echada sobre la mesa.
O puedes hacer lo mismo con un ábaco. Úsalo por columnas verticales, como hicimos en *Primaria II*. Rotula las columnas con las potencias de 10 correspondientes.

Usa un material de canje para representar unos números en el tablero: Material Base 10, tapas de botellas con valores posicionales, o similar. O representa unos números grandes en el ábaco.
Escribe los números que representas:
- Primero en un tablero posicional dibujado en el cuaderno.
- Después de manera "normal" en cifras.
- Finalmente, descompuestos por potencias de 10, como en el ejemplo arriba.

Para practicar en el cuaderno:

Escribe los siguientes números primero en un tablero posicional, después de manera normal en cifras:

1) $1 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 3 \times 10^0$
2) $9 \times 10^6 + 4 \times 10^5 + 1 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 1 \times 10^0$
3) $8 \times 10^9 + 8 \times 10^6 + 8 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 8 \times 10^2$
4) $7 \times 10^7 + 5 \times 10^5 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1$
5) $5 \times 10^{12} + 6 \times 10^6$

OJO: ¿Recordaste llenar con ceros las posiciones que no están ocupadas?

Ampliando el tablero posicional hacia la derecha

Podemos hacer lo mismo con las cifras decimales. Al pasar una posición hacia la *derecha*, el valor posicional *se divide* entre 10. Entonces, al lado derecho del punto decimal tenemos exponentes negativos. (Recuerda lo que aprendiste acerca de las leyes de los exponentes, y los exponentes negativos.) Por ejemplo, el número 403.2205 se representa así:

10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
4	0	3	2	2	0	5

Para practicar en el cuaderno:

Escribe los siguientes números en un tablero posicional, y descompuestos por potencias de 10:

6) 1.00456
7) 367.28
8) 0.00000265
9) 800.080008
10) 201.907700

Escribe los siguientes números primero en un tablero posicional, después de manera normal en cifras:

11) $3 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$
12) $1 \times 10^4 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-4}$
13) $4 \times 10^6 + 4 \times 10^{-7}$
14) $8 \times 10^{-5} + 7 \times 10^{-6} + 5 \times 10^{-8}$
15) $5 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + 4 \times 10^3 + 8 \times 10^4$

Prefijos de las unidades de medida

Las medidas de longitudes terminan todas con "metro". Pero pueden tener diferentes prefijos: "centí-metro", "milí-metro", "kiló-metro", etc.
Los mismos prefijos se pueden usar también con otras unidades de medida: "mili-gramo", "kilo-gramo", etc. Estos prefijos significan números, y se usan según las siguientes tablas:

Múltiplos de las medidas:			
Prefijo	Abreviación	Significado	Ejemplo
deca-	da	10	dam (decámetro)
hecto-	h	10^2	ha (hectárea)
kilo-	k	10^3	kg (kilogramo)
mega-	M	10^6	MV (megavoltio)
giga-	G	10^9	GW (gigavatio)
tera-	T	10^{12}	TB (terabyte)

Fracciones de las medidas:			
Prefijo	Abreviación	Significado	Ejemplo
deci-	d	10^{-1}	d*l* (decilitro)
centi-	c	10^{-2}	cm (centímetro)
mili-	m	10^{-3}	m*l* (mililitro)
micro-	µ	10^{-6}	µg (microgramo)
nano-	n	10^{-9}	nm (nanómetro)
pico-	p	10^{-12}	

Nota: La abreviación de "micro-" es la letra griega "my", que corresponde a la "m" minúscula. – En su lugar, algunos usan "mc", p.ej. "mcg" = microgramo.

Para practicar:

16) ¿Cuántos mg hay en un kg?

17) ¿Cuántos dam hay en un Mm?

18) Convierte en litros:
a) 367 h*l*, b) 5800 m*l*, c) 400 µ*l*, d) 0.035 M*l*

19) Convierte en mm:
a) 6.7 dam, b) 900 µm, c) 800.35 km, d) 7400 nm

20) Convierte en kg:
a) 75 g, b) 0.04 µg, c) 0.027 Tg, d) 471 dg

21) Una ciudad con 400'000 habitantes consume diariamente 1.4 GWh (gigavatios-hora) de electricidad. ¿Cuántos kWh consume una persona, en promedio?

22) Acerca de una medicina dice: "El paciente debe tomar diariamente 150 µg por kg de peso." – ¿Cuál es la dosis correcta para un paciente que pesa 72 kg?

23) Un glóbulo rojo tiene un diámetro de aproximadamente 8µm. ¿A cuántos glóbulos rojos habría que poner en fila para que la fila mida 1 mm?

24) Una persona puede tener hasta 24×10^{12} glóbulos rojos. Si se pusieran todos estos en fila, ¿cuánto mediría la fila?

25) ¿Con qué otro nombre se conoce ...
a) un megagramo?
b) un kilolitro?
c) una microárea?

¿Correcto?

"Un megáfono = 10^{12} micrófonos"

Notación científica

Para números muy grandes, o fracciones muy pequeñas, no sería práctico escribir el número entero con cifras: Necesitaríamos una gran cantidad de cifras, pero la mayoría de ellas serían ceros, o serían innecesarias. Por ejemplo, la masa de la tierra es de 5'972'000'000'000'000'000'000 toneladas (redondeado). Los muchos ceros se pueden escribir como una potencia de 10. Entonces el número es 5972 x 10^{18}, ó 5.972 x 10^{21}, lo que es lo mismo. (¿Con qué operaciones matemáticas puedes verificar que es realmente lo mismo?)

Esta forma de escribir los números se llama la *notación científica*. – Hemos visto que para escribir un número particular, se pueden escoger diversas potencias de 10. Normalmente se suele escoger el exponente de tal manera que quede *una única cifra, pero distinta de cero, delante del punto decimal*. Según esta convención, la forma 5.972 x 10^{21} sería la correcta o la usual.

De manera similar, 0.0000248 en notación científica se escribe 2.48 x 10^{-5}, porque la cifra 2 se encuentra en la posición de los cienmilésimos, que es $\frac{1}{10^5} = 10^{-5}$.

Ahora, para ***multiplicar o dividir*** números en notación científica, podemos aplicar la ***ley de los exponentes*** que hemos aprendido en la *Unidad 4*. Examina el siguiente ejemplo:

$(4.1 \times 10^{18}) \times (5 \times 10^{15}) = 20.5 \times 10^{18+15}$

$= 20.5 \times 10^{33}$

Ahora todavía falta corregir el resultado, para que quede una única cifra delante de la coma:

$20.5 \times 10^{33} = 2.05 \times 10 \times 10^{33} = 2.05 \times 10^{34}$.

Y de manera similar para una división:

$(2.05 \times 10^{14}) \div (8.2 \times 10^{22}) = 0.25 \times 10^{14-22}$

$= 0.25 \times 10^{-8} = 2.5 \times 10^{-9}$.

Para ***sumar y restar*** no podemos usar esas leyes. Aquí tenemos que tomar en cuenta los valores posicionales de los números. Para no tener que escribir números muy grandes, podemos convertir todos a potencias de 10 con el mismo exponente:

$3.2 \times 10^{13} + 5.8 \times 10^{15} - 9.9 \times 10^{12}$

$= 32 \times 10^{12} + 5800 \times 10^{12} - 9.9 \times 10^{12}$

$= (32 + 5800 - 9.9) \times 10^{12}$

$= 5822.1 \times 10^{12} = 5.8221 \times 10^{15}$.

Algo para hacer: Busca unos libros o sitios web que contienen números en notación científica. Lo más probable es que los encuentres en artículos de astronomía o de física, que contengan datos como los siguientes:

- Distancias entre planetas o estrellas.
- Otros datos sobre planetas y estrellas (diámetro, masa, órbita, etc).
- Datos sobre átomos y partículas elementales (tamaño, carga eléctrica, etc).
- Frecuencias y longitudes de ondas electromagnéticas (luz visible; ondas de radio; etc).
- ... y temas similares.

Compara los números que encuentras. Escribe algunos de ellos en notación "normal".

Para practicar:

Escribe los siguientes números en notación científica:

26) 123	28) 82'500 x 10^8
27) 0.0009009	29) 0.00534 x 10^{41}

30) Densidad del oro: 19'290 kg/m^3

31) Velocidad de la luz en el vacío: 299'800'000 m/s

Escribe los resultados de las siguientes operaciones en notación científica:

32) $6.36 \times 10^9 + 3.66 \times 10^9$

33) $4.88 \times 10^7 - 834'000$

34) $2.5 - 3.99 \times 10^{-5}$

35) $(5.5 \times 10^{-21}) \times (6.4 \times 10^{20})$

36) $(1.026 \times 10^{55}) \div (2.7 \times 10^{42})$

37) $(9.8 \times 10^{19})^3 \div (1.96 \times 10^{99})$

Un poco de historia

Arquimedes y el número de la arena

Hace más de 2000 años, Arquimedes ya inventó algo como una "notación científica" para expresar números muy grandes. Pero solamente se podían expresar con palabras; Arquimedes no proveyó símbolos para escribir esos números.
Antes de eso, los antiguos griegos no tenían nombres para números mayores a una miríada (diez mil). Aunque se podía decir, por ejemplo, "cien miríadas" (¿cuánto sería eso en nuestra numeración?). Arquimedes extendió ese sistema hasta una miríada de miríadas ($=10^8$). A ese número lo llamó "la unidad de los segundos números". Entonces se podía decir por ejemplo: "5'760 de los segundos números", eso sería $5'760 \cdot 10^8$. Eso continuaba hasta "una miríada de miríadas de segundos números" (¿cuánto sería eso?). A ese número, Arquimedes lo llamó "la unidad de los terceros números". Y una miríada de miríadas de terceros números era "la unidad de los cuartos números"; y así sucesivamente hasta "la unidad de los números del orden de una miríada de miríadas".
Una miríada de miríadas de esas unidades era "la unidad del segundo período". (¿Cuánto sería eso, escrito como una potencia de 10?) Entonces seguía un segundo período, otra vez con una miríada de miríadas de "órdenes" de números, que a su vez contenían una miríada de miríadas. Y después un tercer período, y así sucesivamente se seguía potenciando hasta llegar a una miríada de miríadas de períodos. Ése era el mayor número que se podía expresar en el sistema de Arquimedes. (¿A cuánto equivale?)

A continuación, Arquimedes usó este sistema de numeración para estimar y calcular cuántos granos de arena podrían caber en el universo entero. Él hizo eso para convencer a la gente de que aun ese número no era "infinito"; que era un número que se podía calcular y expresar. En la introducción a su obra, "El contador de arena", dice:

"Existen algunos, Rey Gelón, que creen que el número de granos de arena es infinito en multitud; y cuando me refiero a la arena me refiero no sólo a la que existe en Siracusa y el resto de Sicilia, sino también la que se puede encontrar en cualquier región, ya sea habitada o deshabitada. Y hay otros quienes, aunque no lo consideran infinito, sin embargo piensan que no se puede nombrar ningún número lo suficientemente grande para expresar su magnitud..."

Para refutar eso, Arquimedes expone su método de nombrar los números y de estimar la cantidad de granos de arena. Él comienza con la suposición de que la proporción entre el diámetro del universo y la órbita de la Tierra alrededor del Sol, es igual a la proporción entre el diámetro de la órbita y el diámetro de la Tierra misma. Por supuesto que tuvo que apoyarse en estimaciones, ya que esas medidas no eran conocidas con la misma exactitud como hoy en día. Como resultado, llegó a un "número de arena" igual a "ocho mil miríadas de los octavos números". (O sea, ni siquiera tuvo necesidad de usar sus "períodos" superiores.)

Ahora, tú puedes hacer unas estimaciones y unos cálculos propios. Por ejemplo:

¿Cuánto mediría el universo, según las suposiciones de Arquimedes?

¿Cuántos granos de arena cabrían? ¿Llegas a un resultado similar al de Arquimedes?

Compara los resultados con una estimación actual, de que el universo entero contiene aproximadamente 10^{80} átomos.

(Por supuesto que las dos estimaciones no se pueden comparar así no más. Las estimaciones actuales acerca de la extensión del universo son muchos millones de veces mayores que la estimación de Arquimedes. Por el otro lado, la mayor parte del universo consiste en espacio vacío con prácticamente nada de materia, mientras que Arquimedes calculó cuánto sería el número si el universo fuera repleto de arena. Y por supuesto que no es lo mismo si calculamos con granos de arena o con átomos.)

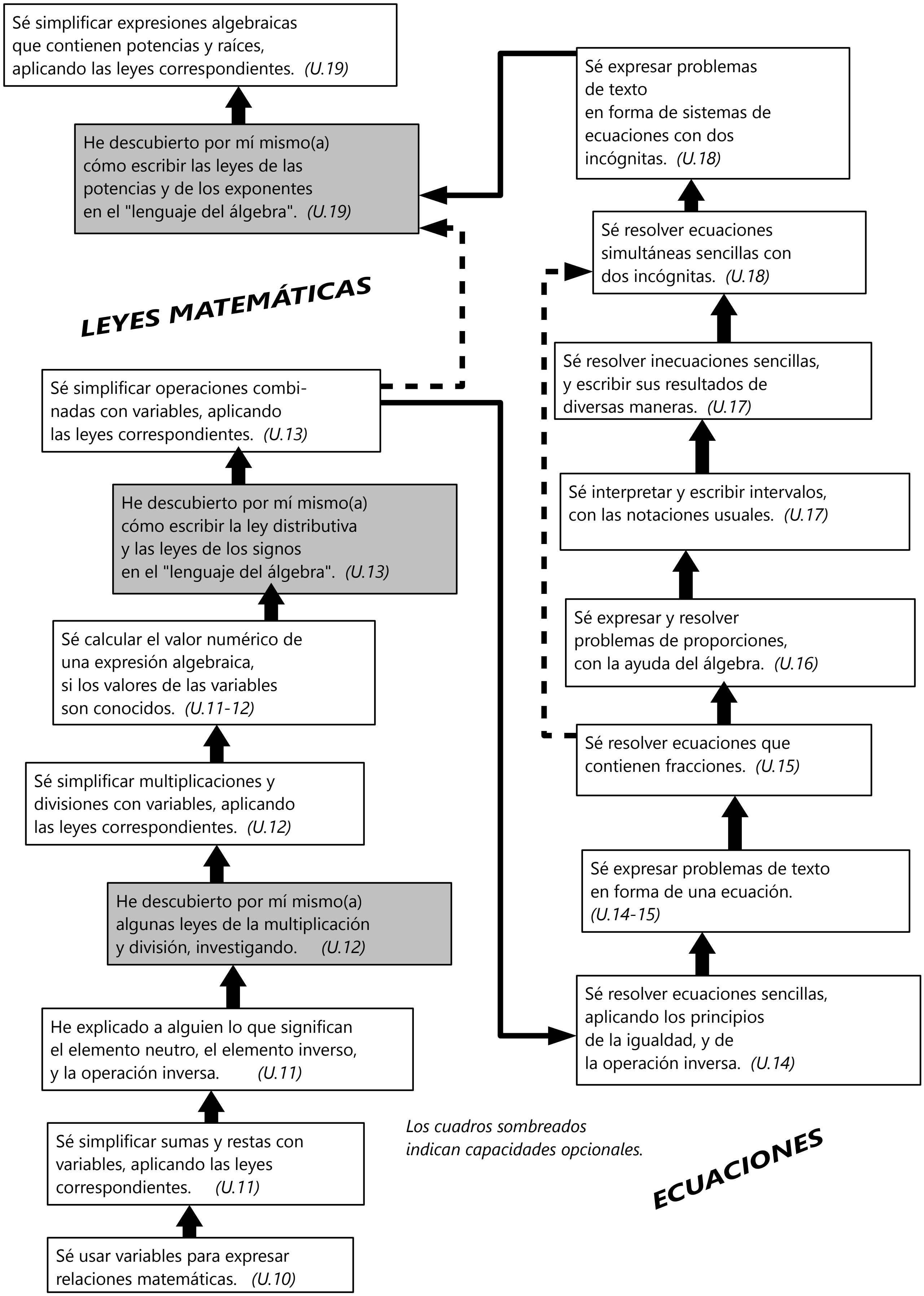
Matemática divina

¿Por qué los hombres podemos calcular las dimensiones del universo?

Si el universo fuera producto del azar, no tendría leyes que lo gobiernan. Su funcionamiento no se podría expresar con fórmulas matemáticas.

Y si nuestros cerebros fueran producto del azar, no podríamos formular leyes lógicas acerca del universo. Un cerebro creado por una evolución ciega, serviría solamente para la sobrevivencia en nuestro entorno inmediato.
Es uno de los milagros más grandes, que el hombre puede descubrir y calcular las leyes del universo. Eso se explica solamente con que Dios creó un universo ordenado, y que él también creó nuestros cerebros.

Camino de aprendizaje – Bloque II



Los cuadros sombreados indican capacidades opcionales.

Unidad 14 - Ecuaciones sencillas

Prerrequisitos:

- Operaciones básicas con expresiones algebraicas *(Unidades 11 a 13)*.

Materiales necesarios:

- Balanza de platillos; o material para construir una de manera casera (madera, clavos, sierra, martillo, etc.)
- Regletas Cuisenaire
- Unos objetos de la vida diaria

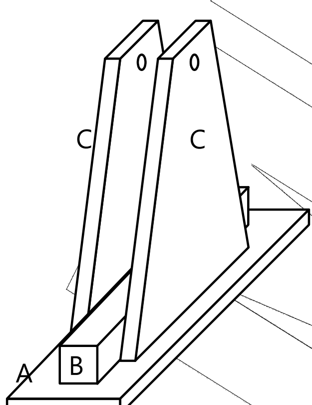
Introducción

En esta Unidad aprenderemos los dos principios fundamentales para resolver ecuaciones. Si entiendes estos dos principios, ya podrás resolver una gran variedad de ecuaciones, sin necesidad de memorizar muchos "trucos" y procedimientos particulares. Lo haremos primero con objetos en una balanza, y después con expresiones algebraicas en el papel.

TALLER Fabricamos una balanza

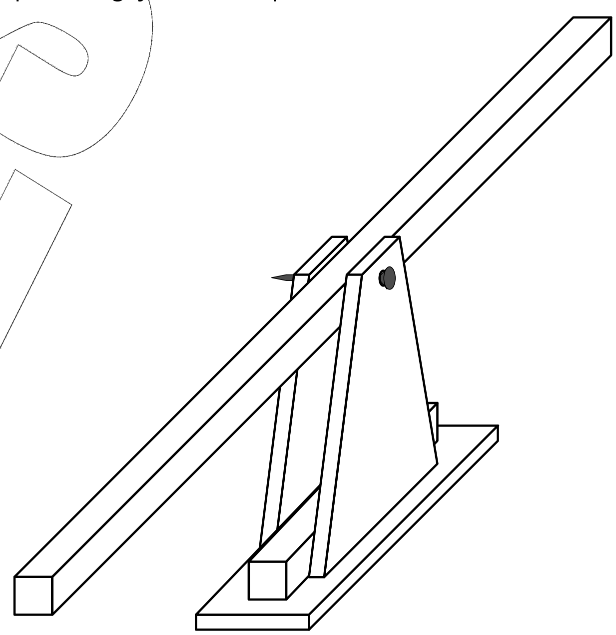
¿Puedes conseguir una balanza de platillos? Si tienes una, no necesitas hacer esta actividad. Si no tienes, entonces fabrica la tuya. Si te falta talento para los trabajos de carpintería, pide la ayuda de alguien que sabe hacerlo.

El dibujo te muestra cómo hacer el soporte para la balanza. Corta la base (A) y las piezas laterales (C) de madera delgada, y la pieza central (B) de un listón un poco más grueso (aprox. 2.5 x 2.5 cm). Lima bien las piezas para que no se desprendan astillas. Las piezas laterales (C) deben ser iguales, y tener el agujero en el mismo lugar.

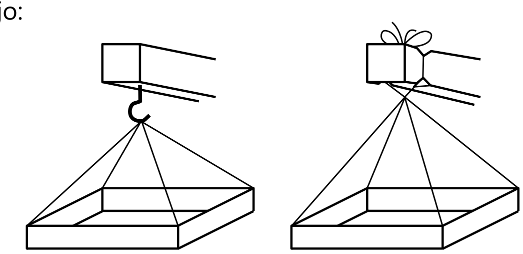


Clava primero el listón a la base, introduciendo clavos desde abajo. Después clava las piezas laterales al listón. Si quieres que sea más estable, puedes usar tornillos y goma.

Ahora consigue otro listón, de 50 a 70 cm de largo, y un clavo de 2 a 3 pulgadas (5 a 7 cm). Perfora el listón en el medio, de manera que el clavo puede pasar fácilmente. Ármalo sobre el soporte, pasando el clavo por los agujeros en las piezas laterales:



En cada extremo del listón, amarra un platillo, o una cajita, canastita, o similar. Será más fácil si cortas unas muescas en la madera, o si le pones un gancho por debajo:



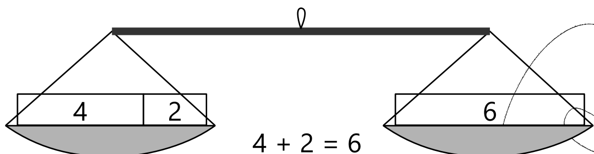
La balanza debe estar en equilibrio si ambos platillos están vacíos. Si no lo está, puedes equilibrarla, pegando unas pequeñas pesas en el platillo más ligero: clavos pequeños, pedazos de alambre, etc.

Usaremos esta balanza para explorar las propiedades de las ecuaciones. Si tienes unas pesas exactas, puedes usarla también para pesar objetos.

El principio de la igualdad

Pon en el platillo izquierdo de la balanza una regleta Cuisenaire de 4, y otra de 2. Pon en el platillo derecho una regleta de 6. La balanza debe estar en equilibrio. *(A veces no es tan exacto, por unas imperfecciones en la balanza o en las regletas. Aceptaremos también un equilibrio "imperfecto", con tal que la matemática sea correcta.)*

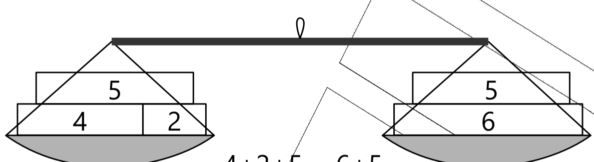
La balanza está en equilibrio cuando el contenido de ambos platillos pesa igual. Hemos representado la igualdad:



4 + 2 = 6

Ahora añade una regleta de 5 al platillo izquierdo. La balanza se desequilibra. ¿Qué puedes hacer para equilibrarla nuevamente, pero *sin quitar la regleta que acabas de colocar*?

- Pues, puedes añadir una regleta de 5 al platillo derecho. Ahora tenemos la igualdad:



4+2+5 = 6+5

El equilibrio se mantiene, si hacemos lo mismo por ambos lados. Este es el principio fundamental para entender las ecuaciones:

La igualdad se mantiene, si efectuamos la misma operación con ambos lados.

Probamos con otra operación: Multiplicamos el contenido de ambos platillos por 3. Multiplicar es "hacer copias de lo mismo". A la izquierda hay una regleta de 4. Añadimos dos regletas de 4, ahora hay tres de ellas. De la misma manera multiplicamos la regleta de 2 y la de 5. Y hacemos lo mismo por el lado derecho. La balanza debe otra vez estar en equilibrio:

$$(4 + 2 + 5)\cdot 3 = (6 + 5)\cdot 3$$

Ahora una sustracción: Quitamos por ambos lados dos regletas de 5. Ahora tenemos:

$$(4 + 2 + 5)\cdot 3 - 5 - 5 = (6 + 5)\cdot 3 - 5 - 5$$

Si deseas, haz lo mismo con algunas otras operaciones. Mientras hacemos *lo mismo* por ambos lados, el equilibrio se mantiene.

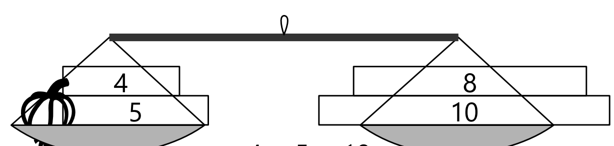
Cuando estés satisfecho con el experimento, continúa al siguiente paso:

Introducimos una incógnita

Coloca unas regletas al platillo izquierdo. Por ejemplo un 4 y un 5. Añade algún objeto pequeño; por ejemplo un bolígrafo, una cucharita, o una frutita.

Ahora llena el platillo derecho con regletas, hasta que la balanza esté en equilibrio. Hazlo de manera sistemática, para saber fácilmente cuánto valen las regletas: Primero pon tantas regletas de 10 como puedes sin que este lado pese más. Después aumenta regletas pequeñas, o cubitos de unidad, hasta alcanzar el equilibrio.

Ahora tenemos una ecuación con una incógnita. Llamemos ***x*** al objeto "incógnito". Supongamos que las regletas en el platillo derecho valen 18, entonces la ecuación es:



x + 4 + 5 = 18

Anota tu propia ecuación, según las regletas que tú tienes en tu balanza.

Queremos que la ***x*** quede sola en el platillo izquierdo. Lo hacemos paso por paso: Primero quitamos la regleta del 4. ¿Qué tenemos que hacer por el lado derecho, para que la balanza esté en equilibrio? – Después lo mismo con la regleta del 5.

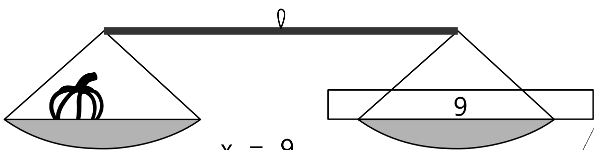
(Para poder quitar las cantidades correctas por el lado derecho, tendrás que canjear unas regletas por cubitos de unidad, o por regletas pequeñas.)

Anotemos cómo se transformó la ecuación durante este proceso. Al lado de cada línea anotamos por separado la *operación* que efectuamos por ambos lados, para llegar al siguiente paso:

$$\boldsymbol{x} + 4 + 5 = 18 \qquad | -5$$

$$\boldsymbol{x} + 4 = 13 \qquad | -4$$

$$\underline{\boldsymbol{x} = 9}$$



x = 9

¡La ***x*** quedó sola! (Se dice también: Hemos "despejado" la ***x***.) Ahora sabemos que el objeto ***x*** equivale a 9 unidades de las regletas.

Anota de la misma manera la transformación de tu ecuación, según los números de tu propio ejemplo.

En este proceso hemos utilizado el segundo principio importante de las ecuaciones, el principio de la operación inversa:

Cada operación se anula con su operación inversa.

En la ecuación original, se *sumaban* unas regletas a la ***x***. Para tener la ***x*** sola, tuvimos que *restar* esas regletas, porque la sustracción es la operación inversa de la adición.

Haz uno o dos ejemplos similares, con otros números y con otros objetos "incógnitos". Anótalos de la misma manera. Continúa hasta entender bien lo que estamos haciendo.

Un ejemplo que no se puede representar en la balanza

$$\boldsymbol{x} - 7 - 2 = 13$$

Esta ecuación no la podemos representar en la balanza, porque no tenemos "regletas con peso negativo". Pero podemos resolverla en el papel, aplicando los principios que conocemos:

Para que la ***x*** quede sola, tenemos que eliminar las sustracciones. Su operación inversa es la adición. Entonces:

$$\boldsymbol{x} - 7 - 2 = 13 \qquad | +2$$

$$\boldsymbol{x} - 7 = 15 \qquad | +7$$

$$\underline{\boldsymbol{x} = 22}$$

La comprobación de una ecuación

Quizás dudas de este resultado, porque no lo hemos hecho con la balanza. Pero podemos comprobarlo: Si ***x***=22, entonces la ecuación original debe ser verdadera si escribimos 22 en lugar de la ***x***:

$$22 - 7 - 2 = 13$$

$$13 = 13$$

¡Correcto! (Si hubiera salido algo como "17=13", entonces nuestra solución sería equivocada.)

Comprueba de la misma manera algunas de tus ecuaciones de los experimentos anteriores.

Hacerlo de manera más eficaz

Dejemos la balanza de un lado por un tiempo, y resolvamos ecuaciones en el papel. Podemos mejorar un poco nuestra técnica.

Comenzamos con esta ecuación:

$$\boldsymbol{x} + 4 + 5 + 8 = 33$$

En vez de hacer tres operaciones separadas, podemos escribir el lado izquierdo de una manera más sencilla. Así se resuelve la ecuación con una sola operación:

$$\boldsymbol{x} + 17 = 33 \qquad | -17$$

$$\underline{\boldsymbol{x} = 16}$$

Entonces: Si se puede simplificar algo en un lado de la ecuación (o en ambos), hagamos eso primero.

Para practicar:

Intenta si ya puedes resolver ecuaciones en el papel. Simplemente haz con ambos lados de la ecuación la misma operación, hasta que la ***x*** se quede sola.

1) $16 + x = 78$

2) $x - 59 = 46$

3) $112 = 288 - x$

4) $x - 135 + 23 = -55 + 19$

5) $25 - (x - 78) = 96 - (-45)$

6) $x + (-52 - (-13 + x)) = 22 - (x + 91)$

Nota: En una ecuación como $64 - \boldsymbol{x} = 37$, queremos que la $\boldsymbol{x}$ se vuelva positiva. Hay dos maneras de lograr eso:

a) Sumamos $\boldsymbol{x}$ por ambos lados de la ecuación:

$$64 - \boldsymbol{x} = 37 \qquad | +\boldsymbol{x}$$

$$64 = 37 + \boldsymbol{x} \qquad | -37$$

$$\underline{27 = \boldsymbol{x}}$$

b) Multiplicamos ambos lados de la ecuación por (–1). Eso tiene el efecto de que todos los sumandos cambian de signo:

$$64 - \boldsymbol{x} = 37 \qquad | \cdot (-1)$$

$$-64 + \boldsymbol{x} = -37 \qquad | +64$$

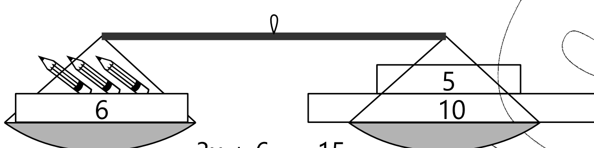
$$\underline{\boldsymbol{x} = 27}$$

Por ambos caminos llegamos al mismo resultado.

La incógnita multiplicada

Volvamos a usar la balanza. Para el siguiente experimento necesitas varios objetos iguales; por ejemplo tres bolígrafos del mismo tipo. Empieza como antes, con unas regletas en el platillo izquierdo. Añade los objetos iguales. Después llena el platillo derecho con regletas, hasta equilibrar la balanza. Anota tu ecuación.

Anita tiene la siguiente ecuación:



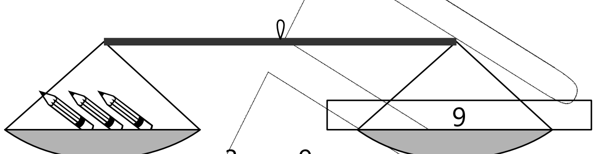
3x + 6 = 15

Ella escribe $3\boldsymbol{x}$, porque tiene 3 lápices en el platillo izquierdo.

Queremos despejar la $\boldsymbol{x}$ como antes. Quitamos las regletas sobrantes:

$$3\boldsymbol{x} + 6 = 15 \quad | -6$$

$$3\boldsymbol{x} = 9$$



3x = 9

Hazlo con tu propia ecuación, y anota los pasos.

"¿Qué hacemos ahora?", pregunta Anita. – "Quitemos dos lápices", sugiere Mario, "entonces queda uno solo." – "Pero ¿qué hacemos entonces por el lado derecho? Allí no hay lápices para quitar." – ¿Cuál es la operación correcta para que quede un único lápiz?

"$3\boldsymbol{x}$" significa una *multiplicación.* "Un lápiz multiplicado por 3." La multiplicación se anula con una *división.* Entonces, en el platillo derecho tenemos que dejar un tercio de lo que había:

$$3\boldsymbol{x} = 9 \qquad | \div 3$$

$$\underline{\boldsymbol{x} = 3}$$

Esta es la solución correcta. – Puede ser que en el caso de tu ecuación la división no salga exacta. Si quieres, puedes usar pedazos de papel o de plastilina como "fracciones de la unidad", para lograr un equilibrio exacto.

La sugerencia de Mario hubiera dado el siguiente resultado:

$$3\boldsymbol{x} = 9 \qquad | -2\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = 9 - 2\boldsymbol{x}$$

Eso es matemáticamente correcto. Pero no nos ayuda, porque ahora tenemos incógnitas por ambos lados. Así seguimos sin saber cuánto es la $\boldsymbol{x}$.

Haz con tu balanza unos ejemplos de ecuaciones con "la incógnita multiplicada", y anota las ecuaciones correspondientes. Continúa hasta que lo entiendas bien.

Otros ejemplos

Para el siguiente ejemplo necesitamos otra vez unos objetos iguales. Ahora ponemos incógnitas por *ambos* lados de la balanza – pero en cantidades distintas. Después equilibramos con regletas el platillo que pesa menos.

Pablo pone 2 cucharitas en el platillo izquierdo, y 5 cucharitas en el platillo derecho. La balanza se equilibró con 69 unidades de regletas en el platillo izquierdo:

$$2\boldsymbol{x} + 69 = 5\boldsymbol{x}$$

Haz tu propio ejemplo y anótalo.

¿Qué harías aquí para que quede una $\boldsymbol{x}$ sola? Recuerda que siempre tenemos que hacer la misma operación con ambos lados.

"No puedo quitar regletas", dice Pablo, "porque al lado derecho no hay ninguna. Pero ¿qué tal si quito cucharitas?"

$$2\boldsymbol{x} + 69 = 5\boldsymbol{x} \qquad | -2x$$

$$69 = 3\boldsymbol{x}$$

Unidad 28 - Polígonos

Prerrequisitos:

- Propiedades de rectas y ángulos *(Unidad 20)*.
- Círculos y rectas *(Unidad 23)*.
- Ángulos en un círculo *(Unidad 25)*.
- Líneas notables en triángulos *(Unidad 27)*.

Materiales necesarios:

- Herramientas de dibujo geométrico, papel, colores *(para el proyecto de arte)*.

Viaje de exploración matemática

Sumas de ángulos en polígonos

1) Ya sabemos que la suma de los ángulos en un triángulo es siempre 180º, y en un cuadrilátero es siempre 360º. *(Unidades 20 y 21)*. ¿Qué tal con polígonos de más lados? – Encuentra una manera de calcular la suma de los ángulos en un pentágono, un hexágono, etc.

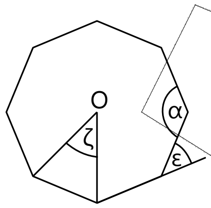
2) ¿Puedes generalizar los resultados de 1)? O sea, si tenemos un polígono de ***n*** lados, ¿puedes expresar la suma de sus ángulos en forma de una fórmula que contiene ***n***?

3) Examina de la misma manera la suma de los ángulos *exteriores* en un polígono de ***n*** lados.

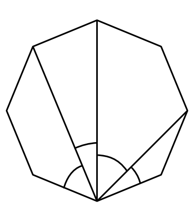
Ángulos en polígonos regulares

En el libro de Primaria II hemos aprendido cómo construir cualquier polígono regular a partir de un círculo, usando el transportador. Esta misma propiedad nos sirve también para calcular sus ángulos.

4) Demuestra que la construcción con el círculo, partiendo los 360º alrededor del centro en ángulos iguales, produce efectivamente un polígono regular. (Recuerda: Un polígono es regular si todos sus lados, y también todos sus ángulos en los vértices, son iguales.)



5) Examina los ángulos en un polígono regular. Encuentra fórmulas para el ángulo interior (α), el ángulo exterior (ε), y el ángulo central (ζ) de un polígono con ***n*** lados.

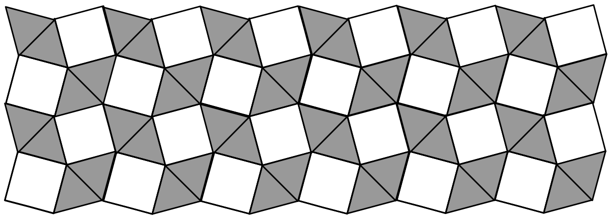


6) Examina los ángulos que forman las *diagonales* en los vértices. ¿Encuentras una manera de calcular esos ángulos, si el polígono es regular?

7) En 4) hemos demostrado que en cada círculo se puede inscribir un polígono regular de ***n*** lados. ¿Es el inverso también verdadero? O sea, ¿tiene todo polígono regular un circuncírculo? ¿Puedes demostrarlo?

8) ¿Qué maneras encuentras de partir un polígono regular completamente en polígonos regulares más pequeños?
- Una posibilidad fácil consistiría en partir un cuadrado en cuatro cuadrados pequeños. Pero los polígonos pequeños no necesitan ser del mismo tipo como el grande; y también entre sí no necesitan ser iguales. Solamente queremos que sean regulares. ¿Qué particiones puedes encontrar que cumplen estas condiciones?

9) Encuentra patrones "semirregulares" de baldosas de polígonos regulares que cubren un plano sin dejar huecos. – Un patrón "semirregular" es uno que contiene más que un solo tipo de polígonos regulares; pero de tal manera que en cada vértice se unen los mismos tipos de polígonos en el mismo orden. O sea, los ángulos que se juntan en un vértice pueden sobreponerse de manera congruente sobre los ángulos en cualquier otro vértice – aunque una rotación y/o reflexión puede ser necesaria.



El dibujo muestra un tal patrón semirregular. En cada vértice tenemos, en orden, un cuadrado, un triángulo equilátero, otro cuadrado, y dos triángulos equiláteros.

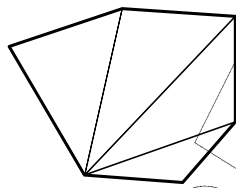
¿Cuántos otros patrones semirregulares encuentras?

Para investigar las preguntas 8) y 9), quizás te ayuda el mosaico del libro de Primaria II, Unidad 64.

El viaje guiado contiene ejercicios adicionales acerca de este tema.

VIAJE GUIADO

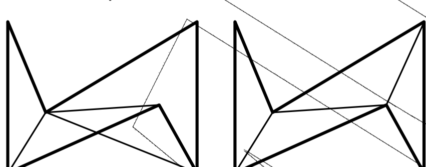
Sumas de ángulos en polígonos



1, 2) Todo polígono se puede partir en triángulos. Solamente hay que hacerlo de tal manera que todos los ángulos se encuentren en los vértices del polígono. Con polígonos convexos, eso no es ningún problema: Escoge cualquier vértice, y únelo con todos los otros vértices. Si el polígono tiene ***n*** lados, ¿cuántos triángulos resultan? ¿Cuál es entonces la suma de los ángulos? (Es el número de triángulos, multiplicado por 180º.)

(Esta pregunta no tiene pautas en el Anexo A. Si realmente no logras dar los pasos que faltan, consulta las fórmulas en el Anexo B, 5.4.)

Nota: Si deseas demostrar que lo mismo vale para polígonos *cóncavos,* podrías encontrar unas dificultades en los detalles. Por ejemplo, el polígono en el primer dibujo no tiene ningún punto que permite partirlo de la misma manera como el ejemplo anterior; siempre habrá uno o varios triángulos que no quedan dentro del polígono. Una opción consistiría en demostrar que en



todo caso existirá otra partición, como la que muestra el segundo dibujo. Otra opción consistiría en permitir triángulos afuera del polígono, y demostrar que en ese caso se puede calcular con las *diferencias* de ángulos. Pero ambas opciones son bastante difíciles de demostrar rigurosamente.

3) La suma de los ***ángulos exteriores*** se puede también examinar con triángulos, pero eso se hace un poco complicado. Más fácil es usar lo que ya sabemos acerca de la suma de los ángulos interiores:
Cada ángulo exterior es el suplemento del ángulo interior correspondiente. Entonces, su suma es:

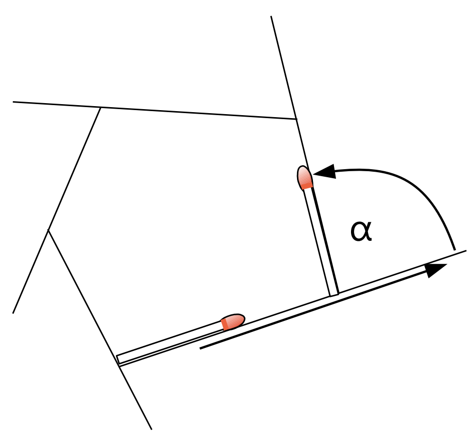
$(180º-\alpha_1) + (180º-\alpha_2) + \ldots + (180º-\alpha_{\boldsymbol{n}})$

$= \boldsymbol{n}\cdot 180º - (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\boldsymbol{n}})$

... y la fórmula para la suma en paréntesis ya conocemos. (α_1, α_2, ... $\alpha_{\boldsymbol{n}}$ significan los ángulos interiores del polígono.) Termina tú mismo el cálculo.

Existe otra demostración aun más sencilla y más práctica:

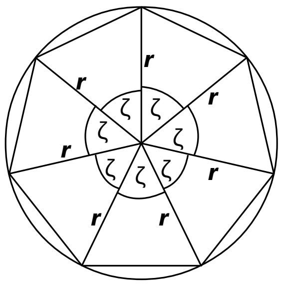
Dibuja un polígono cualquiera. Es preferible que sea convexo, y por supuesto que sus lados tienen que ser rectos. Prolonga sus lados afuera de los vértices. Coloca un palito de fósforo o un lápiz pequeño sobre uno de los lados. Muévelo a lo largo del lado hacia afuera del polígono, hasta que su extremo posterior coincide con el vértice. Gíralo hasta que coincide con el siguiente lado. Este giro corresponde a la medida del ángulo exterior en ese vértice. *(Vea el dibujo.)* Mueve el fósforo hasta el siguiente vértice, gíralo de la misma manera, continúa por el siguiente lado, y así sucesivamente hasta volver al inicio. Entonces el fósforo habrá dado exactamente una vuelta entera alrededor de su eje. Este ángulo de giro – una vuelta completa, es la suma de todos los ángulos exteriores. Es fácil de ver que esto aplica a todos los polígonos. Lo sorprendente es que ¡la suma de los ángulos exteriores no depende del número de lados!



(Fuente de esta demostración: Martin Gardner, "Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American", Nueva York 1966)

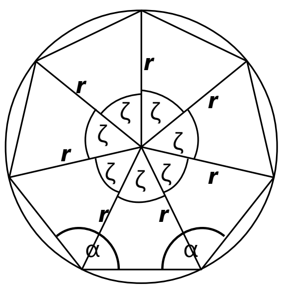
Ángulos en polígonos regulares

4) Demostraremos que la construcción que hemos aprendido en el libro de Primaria II, para un polígono regular, es correcta:



Los ángulos en el centro son iguales, porque los hemos construido así. Los radios son iguales entre sí, porque son radios de un mismo círculo. Por tanto, todos los triángulos que hemos construido son congruentes (LAL).

En consecuencia, también sus bases son iguales (los lados del polígono); y sus ángulos en los vértices son iguales. Con eso se cumplen las condiciones para que el polígono sea regular.



5) Calcularemos los ***ángulos de un polígono regular*** con ***n*** lados. Lo más fácil es el ángulo central ζ: es 360º/***n***, porque hemos dividido los 360º del centro en ***n*** partes iguales.

Ahora, un ángulo interior α es la suma de los dos ángulos en la base de un triángulo parcial. Por tanto es el suplemento de ζ:

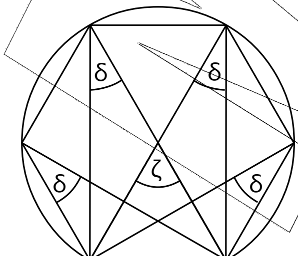
α = 180º – ζ = 180º – 360º/***n*.**

El ángulo exterior ε es a su vez el suplemento de α; entonces es nuevamente igual a ζ:

ε = ζ = 360º/*n*.

6) Examinemos ahora los ***ángulos entre las diagonales***. Estos ángulos son ángulos inscritos en un círculo, sobre una cuerda que es el lado del polígono. Por tanto, todo ángulo entre diagonales "vecinas" es igual a la mitad del ángulo central:

δ = ζ/2 = 180º/***n*.**



7) *Todo polígono regular tiene un circuncírculo.*

Deben existir diversas maneras de demostrarlo. Ésta es una de ellas:

Llamemos a los vértices sucesivamente A, B, C, etc. Construimos las mediatrices de AB y de BC. Su intersección O tiene distancias iguales desde A, B y C. O sea, O es el circuncentro del triángulo ABC.

Consideremos ahora el triángulo BCD. Su circuncentro se encuentra en la mediatriz de BC que ya construimos.

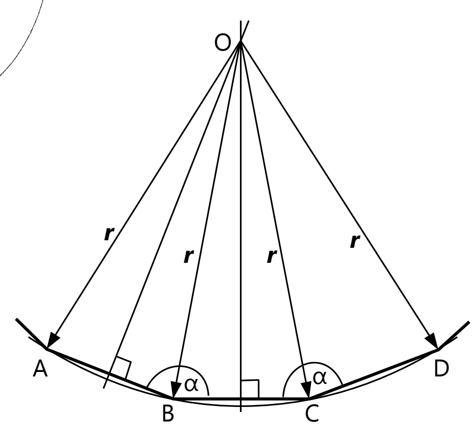
Ahora, según la condición inicial, el polígono es regular.

Entonces AB=BC=CD, y ∡ABC = ∡BCD.

Entonces los triángulos ABC y BCD son congruentes (LAL).

Pero entonces también sus circunradios son iguales. Por tanto, O es también el circuncentro del triángulo BCD; y OD = OC = OB.

Este razonamiento se puede continuar para todos los vértices siguientes. La distancia de O a todos los vértices es igual. Por tanto, O es el circuncentro del polígono entero.

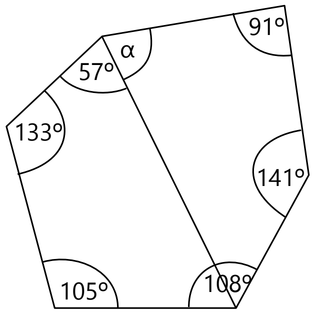


8, 9) Unas pautas acerca de estos problemas del viaje de exploración se encuentran en el *Anexo A*.

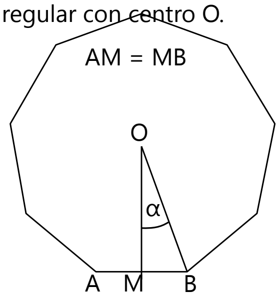
Para practicar:

En los siguientes dibujos, calcula el ángulo α (excepto donde se indica otra cosa).

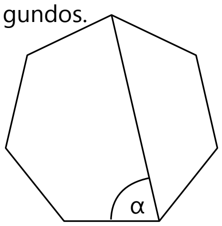
13)



14) La figura es un nonágono regular con centro O.



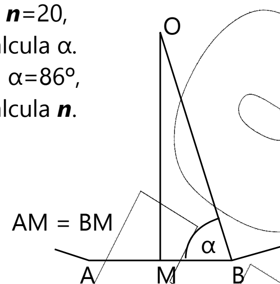
15) La figura es un heptágono regular. Calcula α en fracciones de grados, y en minutos y segundos.



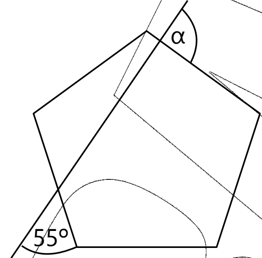
16) La figura es parte de un polígono regular de ***n*** lados con centro O.

a) Si ***n***=20, calcula α.

b) Si α=86º, calcula ***n***.



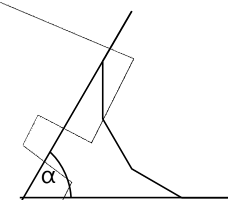
17) La figura es un pentágono regular.



18) La figura es parte de un polígono regular de ***n*** lados.

a) Si ***n***=16, calcula α.

b) Si α=122º 24', calcula ***n***.



19) Los vértices de un dodecágono regular se nombran sucesivamente A, B, C, ..., L.

a) Demuestra que CGK es un triángulo equilátero.

b) Demuestra que BEHK es un cuadrado.

c) ¿Qué clase de cuadrilátero es DFIK?

20) Construye un dodecágono regular con apotemas de 5cm.

21) Construye un pentágono regular con diagonales de 6cm. *(Usa el transportador.)*

22) Son dadas dos rectas paralelas. Construye un octágono regular, de manera que uno de sus lados coincide con una de las rectas, y otro lado con la otra recta.

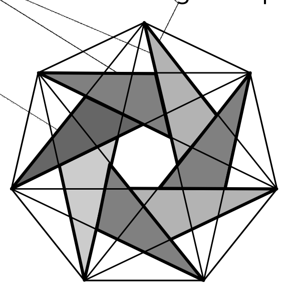
23) Son dadas dos rectas paralelas. Construye un heptágono regular, de manera que uno de sus lados coincide con una de las rectas, y el vértice opuesto a ese lado con la otra recta. *(Usa el transportador.)*

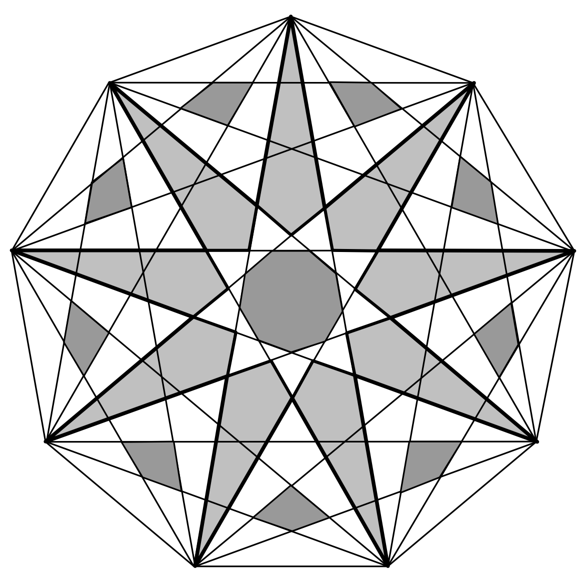
24)** Demuestra o refuta: Se tiene un polígono regular con ***n lados; ***n*** ≥ 8, y ***n*** es un número par. Demuestra que existen por lo menos ***n***+1 puntos en el interior del polígono que son la intersección de por lo menos tres diagonales.

TALLER

Proyecto de arte: Polígono decorativo

Construye un polígono regular del tamaño de una hoja entera. Dibuja todas sus diagonales. Dentro de esta "red" de diagonales encontrarás muchas estrellas y otras figuras geométricas interesantes. Escoge las que te parecen interesantes, repásalas con líneas más gruesas, y/o coloréalas. Los dibujos muestran un ejemplo con un heptágono, y otro con un nonágono.





Unidad 34 - Múltiplos y divisores comunes – Enfoque profesional

Prerrequisitos:
- Principios relacionados con los múltiplos y divisores comunes.
- Calcular con expresiones algebraicas *(Unidades 11 a 13)*.

Los principios más importantes acerca de los múltiplos y divisores comunes se introdujeron en el nivel de Primaria II. Si fuera necesario, repásalos con la ayuda del libro de Primaria II, o con el resumen en el *Anexo B* de este libro.
En esta Unidad vamos a investigar unas propiedades adicionales de los múltiplos y divisores, y las vamos a demostrar con la ayuda del álgebra.

Además vamos a plantear unos problemas más difíciles, relacionados con múltiplos y divisores.

El propósito de esta Unidad es entrenar tu capacidad de razonar, especialmente en relación con las demostraciones matemáticas. El contenido en sí es opcional, desde la perspectiva de la mayoría de los currículos escolares.

Viaje de exploración matemática

Investiga si los siguientes enunciados son ciertos. ¿Puedes demostrar que son verdaderos, o refutar los que son falsos?

Divisores de divisores, y múltiplos de múltiplos

1) 90 es divisible entre 3. 15, 18 y 30 son divisores de 90, y también son divisibles entre 3. ¿Podemos entonces concluir lo siguiente?
"Si $\boldsymbol{n}$ es divisible entre $\boldsymbol{a}$, todos los divisores de $\boldsymbol{n}$ también son divisibles entre $\boldsymbol{a}$."

2) 60 es divisible entre 12. 2, 4 y 6 son divisores de 12, y 60 también es divisible entre 2, entre 4 y entre 6. ¿Podemos entonces concluir lo siguiente?
"Si un número $\boldsymbol{n}$ es divisible entre un número compuesto $\boldsymbol{a}$, entonces $\boldsymbol{n}$ es divisible entre todos los divisores de $\boldsymbol{a}$."

3) 40 es divisible entre 8. 80, 200 y 240 son múltiplos de 40, y son también divisibles entre 8. ¿Podemos entonces concluir lo siguiente?
"Si $\boldsymbol{n}$ es divisible entre $\boldsymbol{a}$, todos los múltiplos de $\boldsymbol{n}$ también son divisibles entre $\boldsymbol{a}$."

4) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\text{MCD}(\boldsymbol{a}\,;\,\boldsymbol{b})}$ y $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\text{MCD}(\boldsymbol{a}\,;\,\boldsymbol{b})}$ son PESI.
¿Falso o verdadero? ¿Por qué?

5) Demuestra o refuta:

$\dfrac{\text{MCM}(\boldsymbol{a}\,;\,\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}}$ y $\dfrac{\text{MCM}(\boldsymbol{a}\,;\,\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{b}}$ son PESI.

6) El MCD de 36 y 60 es 12. Otros divisores comunes de 36 y 60 son 2, 3, y 6; y éstos también son divisores de 12.
a) ¿Podemos entonces concluir lo siguiente?
"Todos los divisores del MCD de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son divisores comunes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$."
b) ¿Y también lo siguiente?
"Todos los divisores comunes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son divisores de MCD($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$)."

7) El MCM de 12 y 18 es 36. Otros múltiplos comunes de 12 y 18 son 72, 144, y 180. Éstos son también múltiplos de 36.
a) ¿Podemos entonces concluir lo siguiente?
"Todos los múltiplos de MCM($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) son múltiplos comunes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$."
b) ¿Y también lo siguiente?
"Todos los múltiplos comunes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son múltiplos de MCM($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$)."

8) Demuestra o refuta: Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son PESI, entonces $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ son PESI.

9) Si $\boldsymbol{d}$ = MCD($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), entonces $\boldsymbol{d}$ = MCD($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$).

10) Si $\boldsymbol{d}$ = MCD($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), entonces $\boldsymbol{d}$ = MCD($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$).

11) Dos números sucesivos son PESI.

12) Dos números impares que tienen entre sí una diferencia de 2, son PESI.

13) Dos números impares que tienen entre sí una diferencia de 4, son PESI.

14) Dos números impares que tienen entre sí una diferencia de 6, son PESI.

15) Dos números cuya diferencia es un número primo, son PESI.

16) ¿Bajo qué condiciones es MCM($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = $\boldsymbol{ab}$?

Divisibilidad entre números compuestos

Para la divisibilidad entre números compuestos, podemos "componer" las reglas para sus factores. Por ejemplo, sabemos que un número es divisible entre 6, si es divisible entre 2 y entre 3, porque 2 x 3 = 6.

Solamente que tenemos que hacer esta "composición" de la manera correcta. Analiza los siguientes casos y razona:

17) "Si un número es divisible entre 3 y entre 5, también es divisible entre 15." ¿Verdadero o falso? ¿Puedes fundamentar por qué?

18) "Si un número es divisible entre 4 y entre 6, también es divisible entre 24." ¿Verdadero o falso? ¿Puedes fundamentar por qué?

19) ¿Encuentras una regla general? Si un número ***n*** es divisible entre ***a*** y entre ***b***, ¿entre cuál número compuesto es ***n*** divisible?

VIAJE GUIADO

1) "Si ***n*** es divisible entre ***a***, todos los divisores de ***n*** también son divisibles entre ***a***."

Podríamos encontrar otros ejemplos: 300 es divisible entre 5.
15, 25, 30, 60, 100, y 150 son divisores de 300, y también son divisibles entre 5.
Pero *¡una multitud de ejemplos todavía no es una demostración!* 4 es un divisor de 300, y no es divisible entre 5. Por tanto, nuestra conjetura es falsa. Si ***n*** es divisible entre ***a***, *no necesariamente* todos sus divisores son divisibles entre ***a***.

Nota: Este único ***contraejemplo*** es suficiente para refutar la conjetura. Si queremos establecer una regla general, y ésa falla en un único caso, la regla es falsa. Puede aplicar en *algunos* casos, pero no sirve como regla *general*.

Podemos ir incluso más lejos: Entre los divisores de ***n*** se encuentra necesariamente el 1. Pero el 1 *nunca* es divisible entre ***a***; excepto si ***a*** = 1.

---

2) "Si un número *n* es divisible entre un número compuesto *a,* entonces *n* es divisible entre todos los divisores de *a.*"

Esto sí es correcto. Podemos demostrarlo así:

Sea ***d*** un divisor de ***a***. Entonces es ***a = dp***, donde ***p*** es un número natural.

A su vez, ***n*** es divisible entre ***a***. Entonces es ***n = aq***, con ***q*** ∈ ℕ.

En esta igualdad sustituimos ***a = dp***, y tenemos ***n = dpq***. Eso nos dice que ***d*** es un factor de ***n***; o sea que ***n*** es divisible entre ***d***.

---

3) "Si *n* es divisible entre *a*, todos los múltiplos de *n* también son divisibles entre *a*."

Se puede demostrar de manera similar como 2):

n es divisible entre ***a***, entonces ***n = ap***, con ***p*** ∈ ℕ.

Cada múltiplo de ***n*** se puede escribir como ***nq*** (con ***q*** ∈ ℕ).

Sustituimos la primera igualdad, entonces ese múltiplo es ***apq***. Contiene el factor ***a***, entonces es divisible entre ***a***.

Unidad 37 - Problemas diversos

Prerrequisitos:
- Congruencia modular.
- Propiedades de múltiplos y divisores.
- Algunos problemas pueden requerir conocimientos básicos de combinatoria *(Unidad 50)*.

Un nuevo truco de Alberto

Alberto, "el mago de los números", nos presenta su nuevo truco. "Que alguien de ustedes escoja un número de cuatro cifras. Escribe el mismo número con las cifras en orden inverso, y calcula la diferencia entre los dos números. Por si la diferencia tuviera cifras iguales, vuelve a comenzar con otro número. Necesitamos una diferencia que tenga cuatro cifras distintas. No me hagas ver tus números."
Pablo calcula, y pregunta: "¿Y si la diferencia tiene sólo tres cifras?" – "Ah, eso no es ningún problema", responde Alberto. "Escribe un cero en los millares, y tienes cuatro cifras."

"Ahora", advierte Alberto a su público, "mejor se ayuden todos entre sí, porque van a tener bastante trabajo. Quiero que anoten todos los números que se pueden formar con las cifras de esa diferencia, usando cada cifra una vez. También valen los que tienen un cero adelante. Después sumen todos esos números."

"Está bien", dice Anita. "Yo haré los números que empiezan con 7." – "¡Chis! No me digan sus números", interviene Alberto.

Después de un buen rato, los chicos anuncian que terminaron. "Bien", dice Alberto. "Aunque no me lo crean, yo he visto en mi mente la suma final que obtuvieron. Como prueba, aquí está." Entrega a Susana un sobre cerrado. Susana lo abre. El sobre contiene un papel con un número escrito. Para sorpresa de todos, ¡es la suma final que acaban de calcular!

¿Puedes explicar cómo funciona este truco?

Investigación

Residuos cuadráticos

a) Escribe la sucesión de los cuadrados perfectos (0, 1, 4, 9, 16, ...). Observa las últimas cifras (unidades) de los números. ¿Aparecen todas las cifras de 0 a 9 al final de algún cuadrado perfecto? ¿o hay cifras que nunca aparecen? – Con la ayuda de esta observación, ¿puedes decir rápidamente si 7458 es un cuadrado perfecto o no? ¿Por qué? – ¿Encuentras otros patrones regulares en las cifras finales de los cuadrados perfectos? – ¿Puedes fundamentar matemáticamente el *por qué* de las propiedades que observaste?

b) La cifra final de un número es el residuo al dividir ese número entre 10; o sea el número "módulo 10". Investiga ahora los residuos de los cuadrados perfectos "módulo 3", "módulo 4", "módulo 5", y así sucesivamente, por lo menos hasta "módulo 12".
Anota todas las propiedades interesantes que encuentras. ¿Observas una propiedad común de todas estas sucesiones de residuos? – ¿Puedes fundamentar por qué las sucesiones resultan así?

c) ¿En qué se distinguen las sucesiones de residuos "módulo ***n***", dependiendo de si ***n*** es primo o compuesto? ¿Por que las sucesiones con ***n*** compuestos resultan diferentes?

d)** Si un número ***a ocurre en la secuencia de los residuos de los cuadrados perfectos "módulo ***n***", se dice: "***a*** es un residuo cuadrático módulo ***n***". Por ejemplo, 4 es un residuo cuadrático módulo 10; pero 3 no es un residuo cuadrático módulo 10.

Investiga ahora el siguiente enunciado:
"Si ***a*** es un residuo cuadrático módulo ***n***, entonces ***n – a*** también es un residuo cuadrático módulo ***n***."
¿Es esto verdadero o falso? – ¿o bajo qué condiciones es verdadero? Fundamenta tu respuesta.

e) ¿Qué otras propiedades interesantes de los residuos cuadráticos encuentras?

f) Anota ahora unos números que son sumas de dos cuadrados perfectos (5 = 1+4, 13 = 4+9, 10 = 1+9, etc.) Examina sus residuos módulo 4. ¿A qué conclusión llegas? – ¿Qué clase de números pueden escribirse como la suma de dos cuadrados perfectos? – Puedes examinar también los residuos de esas "sumas de cuadrados" al dividir entre otros números aparte del 4.

Investigación

Una curiosidad matemática: La constante de Kaprekar

Empieza con un número de 4 cifras; por ejemplo 4742. Escribe sus cifras en orden descendiente: 7442. Calcula la diferencia entre este número, y el mismo número con las cifras en orden ascendiente:
7442 – 2447 = 4995. Ahora haz con el resultado nuevamente lo mismo: 9954 – 4599 = 5355.
Si una diferencia tiene sólo tres cifras, se añade un cero como cuarta cifra.
El matemático indio D.R.Kaprekar (1905-1986) observó que si se repite esta operación, sin importar con qué número se comenzó, en algún momento se llegará al número 6174. A partir de allí, el resultado se repite: 7641 – 1467 = 6174. Desde entonces, este número se llama "la constante de Kaprekar".
Verifícalo: Comienza con cualquier número de 4 cifras, y repite la operación hasta llegar a 6174.
La única excepción son los números con 4 cifras iguales, como 3333: con ésos obviamente se llega a cero.

Ahora podemos investigar otras preguntas relacionadas con este tema:

¿Existe una constante similar para los números de 3 cifras? ¿y los de 5, 6, 7 ... cifras?

¿Y qué tal si se hace lo mismo en sistemas de numeración con otras bases?

Un experimento con monedas

Imagínate que en una mesa larga hay quinientas monedas en una fila, todas con la cara arriba. Volteas todas las monedas, una por una. Después comienzas de nuevo, pero ahora volteas solamente cada segunda moneda. Después repasas toda la fila otra vez, pero ahora volteas solamente cada tercera moneda. Después cada cuarta moneda, después cada quinta ... y así sucesivamente, hasta que en el último turno volteas cada 500ª moneda (o sea, únicamente la moneda no.500).

Después de terminar este procedimiento entero, ¿cuáles son las monedas que están con el escudo arriba?

Simplificación aproximada

Los alumnos resuelven operaciones matemáticas. Susana dice: " $^{10}/_{13}$ no se puede simplificar."
- "Pero aproximadamente", responde Alberto.
- "¿Qué quieres decir con eso?"
- " $^{10}/_{13}$ es aproximadamente $^{3}/_{4}$."
- "Puede ser, pero eso no me ayuda para mi tarea. Si la respuesta no es exacta, es equivocada."
- "Depende", dice Alberto. "Para muchos propósitos prácticos, una solución aproximada es suficiente. Por ejemplo, ¿podrías servirme una $^{10}/_{13}$ taza de leche? ¿O cortar $^{10}/_{13}$ de una manzana? $^{3}/_{4}$ es mucho más práctico."
- "Sí, pero no me hables de comida ahora. Para mi tarea no sirve tu simplificación aproximada."
- "Pero debería. Propongo que se incluya en los libros escolares una lección acerca de la simplificación aproximada."

Déjate inspirar por esta conversación para hacer unas investigaciones. Según sé, los libros escolares todavía no contienen lecciones acerca de la simplificación aproximada. Pero tú mismo(a) puedes descubrir los contenidos de una tal lección. Las siguientes preguntas te darán unas ideas:

a) ¿Cuán buena es la aproximación de Alberto? – O sea, ¿cuánto es el error?

b) Intenta simplificar aproximadamente otras fracciones, p.ej. $^{10}/_{17}$ ó $^{19}/_{29}$. ¿Encuentras un procedimiento sistemático para descubrir la mejor simplificación aproximada?
Donde hay varias soluciones, ¿cuál de ellas es la "mejor"? – Encontrarás que pueden existir varias opiniones acerca de ello. ¿Qué criterios usarías para definir cuál es la "mejor" simplificación aproximada? – Fundamenta por qué.

c) ¿Qué condiciones tiene que cumplir una fracción, para que se la pueda simplificar aproximadamente?

d) Intenta descubrir otras propiedades matemáticas de la "simplificación aproximada".

Unas primeras pautas se encuentran al final de esta Unidad. Pero intenta primero descubrirlo tú mismo(a).

Nota: Si no pudiste resolver los problemas **"*¿Qué número soy?*"** *(Unidad 9)*, quizás querrás volver ahora a ésos.
(Pautas en el *Anexo A* en esta Unidad.)

Unidad 46 - Decimales y fracciones

Prerrequisitos:
- Calcular con fracciones y con decimales *(Primaria II)*.
- Calcular con expresiones algebraicas sencillas *(Unidades 11 a 13)*.
- *(Sólo para "Ampliaciones"):* Sistemas de numeración con otras bases *(Unidad 7)*.

En esta Unidad exploraremos las relaciones entre las fracciones y sus representaciones decimales. Observando los números, podrás descubrir muchas de estas relaciones por ti mismo(a). Las preguntas del viaje de exploración te guiarán.
Si no te atreves a explorarlo por cuenta propia, puedes ir al viaje guiado en esta misma Unidad.

Como preparación para ambos viajes, haz una ***tabla de los valores recíprocos de los números de 2 a 20*** (1/2, 1/3, 1/4, etc.) ***en decimales***. Para cada valor, sigue calculando decimales hasta que resulte exacto, o hasta que se repita un período. Necesitarás esa tabla para algunas de las preguntas que siguen.

Acerca de la notación: Para no tener que repetir un período múltiples veces, la parte que se repite se puede marcar con una raya horizontal sobre las cifras respectivas:

$0.\overline{074}$ = 0.074074074...

$0.08\overline{3}$ = 0.0833333... (aquí las cifras 08 no se repiten).

Viaje de exploración matemática

1) Al calcular una fracción en decimales, ¿cómo puedes saber que llegaste al punto donde el período empieza a repetirse?

2) ¿Puede existir alguna fracción que resulta en un número decimal infinito, no periódico? ¿o sea, un número donde nunca se llega a repetir una misma secuencia de cifras infinitamente? ¿Puedes dar un ejemplo de una tal fracción? ¿o puedes demostrar que no existe?

3) ¿Qué tienen en común aquellos denominadores donde la división sale exacta (o sea, el número decimal es finito)? Dado un número cualquiera, ¿cómo puedes predecir si su valor recíproco en decimales será finito o infinito? – Comprueba tu conclusión con las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{64}, \frac{1}{75}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{96}, \frac{1}{125}, \frac{1}{250}.$$

4) Con algunos denominadores, la representación decimal es infinita periódica, pero delante del período aparece una parte que no se repite, como en $^1/_6$ = 0.166666... Estos números se llaman *periódicos mixtos*.

¿Qué tienen en común aquellos denominadores que resultan en un número decimal periódico mixto? – ¿Y *por qué* sucede eso exactamente con los denominadores con aquella propiedad?

5) Para los valores recíprocos que dan un número decimal infinito:
Investiga la longitud de los períodos, en relación con el denominador de la fracción. ¿Encuentras alguna ley o regularidad?

6) Examina el número decimal que representa 1/7. Después verifica la siguiente multiplicación: 7 · 142'857 = 999'999. ¿Encuentras una explicación de por qué sucede eso? ¿Qué conclusiones interesantes puedes sacar de ello?

Nota: El viaje guiado contiene unos ejercicios y temas adicionales, aparte de los que aparecen en estas preguntas.

Pregunta curiosa
(para quienes ya estudiaron química):

¿Cuál es el período del ácido periódico?

(Respuesta en el Anexo A)

VIAJE GUIADO

1) Al calcular una división inexacta con decimales, **¿dónde empieza a repetirse el período?**

A primera vista podríamos pensar que eso sucede cuando en el cociente se repite una cifra anterior. Pero si calculaste tu tabla de los valores recíprocos hasta el 20, habrás notado que eso no es cierto.

Por ejemplo, si calculamos 3÷17 en decimales, resulta 0.17647... Tenemos por segunda vez la cifra 7. Entonces, ¿a partir de ahora se repite todo? – No, si seguimos dividiendo, tendremos: 0.1764705882... (y todavía no se repite). Observemos la operación de la división:

```
 3 ÷ 17 = 0.176470...
-17
 130
-119
  110
 -102
    80
   -68
    120
   -119
      100   (etc.)
```

El primer 7 fue el resultado de dividir 130 ÷ 17, y eso dejó un residuo de 11. El segundo 7, en cambio, es el resultado de dividir 120 ÷ 17, y eso produce un residuo de 1. Por tanto no se trata de la misma operación, y la continuación no es igual.

Al mismo tiempo vemos: Lo que decide sobre la repetición o no, son los *residuos* que se producen en el transcurso de la división. Cuando se repite un mismo residuo (después de acabarse las cifras del dividendo), allí sí se empieza a repetir todo: Siempre bajamos ceros; entonces todos los resultados siguientes serán iguales. Como en este ejemplo:

```
 7 ÷ 37 = 0.189189...
-37
 330
-296
  340
 -333
    70
   -37
    330
   -296
     340   (etc.)
```

Cuando aparece un residuo de 7, se repite la operación 70÷37; y a partir de aquí se repiten todos los resultados.

---

2) ¿Todos los números decimales infinitos son periódicos?

Si hablamos de números que representan fracciones, la respuesta es Sí. Hemos visto que eso depende de los residuos que aparecen en la división. ¡Pero no existen infinitos residuos distintos! Por ejemplo, si dividimos entre 17, los residuos no pueden ser mayores a 16. Entonces, después de un máximo de 16 cifras tiene que repetirse un residuo anterior, o tiene que aparecer un residuo de cero (y entonces el resultado es un número finito). Al calcular tu tabla de valores recíprocos, habrás notado que efectivamente la representación decimal de 1/17 tiene un período de 16 cifras.

Por tanto, ninguna fracción (o número racional) puede tener una representación decimal que no sea periódica.

(Acerca de los números racionales e irracionales, vea la Unidad 30.)

---

3) ¿Cuáles fracciones tienen una representación decimal finita?

Eso es fácil de entender, si pensamos cómo convertiríamos el número decimal de regreso a una fracción. Por ejemplo $0.673 = \frac{673}{1000}$.

Necesariamente, el denominador de una tal fracción tiene que ser una potencia de 10.

Ahora, podría ser que la fracción se puede simplificar. Entonces el denominador no va a ser una potencia de 10, pero necesariamente tiene que ser ***un divisor de una potencia de 10.*** O en otras palabras: ***No puede contener factores primos otros que 2 ó 5.***

Por ejemplo $0.3875 = \frac{3875}{10000} = \frac{31}{80}$;

$$0.804 = \frac{804}{1000} = \frac{201}{250}.$$

- "Pero", dice Jaime, "eso no es cierto. 75 tiene el 3 como factor primo. Entonces con 75 como denominador, los números decimales deberían ser infinitos. Pero yo he calculado $^9/_{75}$ en decimales, y salió finito, salió 0.12."

¿Dónde está el error en el razonamiento de Jaime?

(Si no lo descubres, consulta el Anexo A.)

Por si no lo hiciste en el viaje de exploración, verifica esta ley con las siguientes fracciones:

$\frac{1}{64}, \frac{1}{75}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{96}, \frac{1}{125}, \frac{1}{250}.$

Intenta predecir de cada una, si su representación decimal será finita o infinita. Después calcula y verifica tu predicción.

4) ¿Cuáles fracciones tienen una representación decimal periódica mixta?

Cuando todas las cifras detrás del punto decimal se repiten, el número se llama "periódico puro". Como en $^2/_{27} = 0.074074074.... = 0.\overline{074}$.

"Periódico mixto" se llama un número donde delante del período aparece una parte que no se repite, como en $^1/_{12} = 0.083333... = 0.08\overline{3}$.

Algo similar sucede con fracciones impropias. Compara los siguientes ejemplos:

1 ÷ 3 = 0.33333... (periódico puro)

25 ÷ 3 = 8.33333... (Podríamos decir que es "periódico mixto". Aunque en este caso, la parte que no se repite son los *enteros*.)

Pero entonces también:

25 ÷ 300 = 0.0833333.... (Es el mismo número decimal como antes, solamente trasladado dos posiciones hacia la derecha.)

Por el otro lado, $\frac{25}{300} = \frac{1}{12}$. ¿Puedes ahora ver la conexión con la fracción impropia $^{25}/_3$?

- Nota además que también 1/300 = 0.0033333... es periódico *mixto*; porque los ceros no se repiten.

O podemos escribir la operación de esta manera:

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} \div 3 = 0.25 \div 3$$

O sea, $^1/_{12}$ se puede representar como un número decimal *finito*, dividido entre otro divisor que produce un número decimal infinito. Eso tiene el mismo efecto como en el caso de la fracción impropia. Solamente que las cifras adicionales aquí no son enteros; están detrás del punto decimal.

Entonces, los decimales periódicos mixtos se producen cuando el denominador contiene factores primos que producen un número finito (factores 2 y 5), y además otros factores. En otras palabras:

Los números decimales periódicos mixtos resultan de un denominador "mixto", o sea, que contiene tanto factores 2 y/o 5, como también otros factores primos.

En cambio, ***los números decimales periódicos puros resultan de un denominador que no contiene ninguno de los factores primos 2 ó 5.***

Verifícalo: Intenta predecir de las siguientes fracciones, si su representación decimal será periódica pura, periódica mixta, o finita. (Para no equivocarte, ¡recuerda el "error de Jaime" en la Pregunta 3!)

$\frac{1}{30}, \frac{7}{125}, \frac{3}{48}, \frac{4}{21}, \frac{12}{13}, \frac{5}{42}, \frac{10}{42}, \frac{1}{33}, \frac{1}{330}$

Después de hacer tus predicciones, calcula los decimales para verificarlas.

Nota: *Las preguntas 5) y 6) del viaje de exploración no son parte del viaje guiado. El Anexo A contiene unas pautas acerca de estas preguntas.*

Conversión de números decimales en fracciones *(hallar la fracción generatriz)*

Repetimos brevemente cómo convertir un número decimal *finito* en una fracción. Las cifras detrás del punto decimal tienen sucesivamente los valores posicionales $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc. Entonces, por ejemplo, $0.425 = \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$.

Pero podemos "homogeneizar" esta expresión: $0.425 = \frac{400}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{425}{1000}$.

Vemos que la suma contiene en el numerador exactamente las cifras del número decimal, 425. Eso funciona por causa de las propiedades del sistema decimal. Entonces podemos tomar estas cifras como un único número, y le damos el valor posicional que corresponde a la *última* cifra de ellas.

Por supuesto que ahora se puede simplificar: $0.425 = \frac{425}{1000} = \frac{17}{40}$.

Por si necesitas practicar estas conversiones, aquí hay unos ejercicios. Convierte los siguientes números decimales en fracciones. (Si eso es "muy fácil" para ti, no necesitas hacer los ejercicios.)

7) 0.25	12) 5.895434
8) 0.05	13) 0.9856
9) 0.08	14) 0.34375
10) 3.375	15) 0.02045
11) 0.00096	16) 0.000303

Nota: Algunos llaman a la fracción que es igual a un número decimal dado, la "*(fracción)* ***generatriz***" del número decimal.

Conversión de números decimales periódicos puros en fracciones

Ahora llegamos al "gran truco" que permite convertir un número decimal *infinito* en una fracción. (En realidad no es un "truco"; es solamente una aplicación ingeniosa de las leyes de la matemática.)

Por ejemplo, queremos convertir $0.\overline{513}$ en una fracción. Recuerdas que eso significa el número infinito 0.513513513... . Nuestro problema consiste en hacer desaparecer la "cola infinita" de este número decimal. ¡Eso es posible!

Llamemos ***x*** a nuestro número. Su período tiene tres cifras. Entonces, si trasladamos el número entero por tres posiciones hacia la izquierda, va a tener otra vez todas las cifras del período en el mismo lugar. Sabemos que "trasladarlo tres posiciones hacia la izquierda" equivale a una multiplicación por 1000. Observa:

```
    x =   0.513513513...
1000x = 513.513513513...
```

Ahora podemos calcular la *diferencia* entre estos dos números, ¡y la entera "cola infinita" desaparece!

```
1000x = 513.513513513...
  - x = - 0.513513513...
 999x = 513.0
```

Solamente falta dividir esta ecuación entre 999, y tenemos el valor de ***x***:

$$x = \frac{513}{999} = \frac{19}{37}.$$

Hacemos otro ejemplo, el que nos ocupó en la Pregunta 6 del viaje de exploración: $0.\overline{142857}$. Aquí el período tiene 6 cifras; entonces tenemos que trasladar el número 6 cifras hacia la izquierda:

```
1'000'000x  = 142857.142857...
-        x  =  -   0.142857...
  999'999x  = 142857
```

$$x = \frac{142'857}{999'999} = \frac{1}{7}.$$

(Verifica que está simplificado correctamente.)

Haz lo mismo con los siguientes ejemplos:

17) $0.\overline{63}$	19) $0.\overline{074}$
18) $0.\overline{6}$	20) $0.\overline{0297}$

Habrás visto que en los decimales periódicos puros se puede abreviar este proceso de manera sencilla: Es casi como si fuera un número finito; solamente que el denominador es uno menos. Compara:

$$0.288 = \frac{288}{1000}; \qquad 0.\overline{288} = \frac{288}{999}.$$

Aquí hay unos ejemplos adicionales para practicar:

21) $0.\overline{824175}$	23) $0.\overline{621}$
22) $0.\overline{68}$	24) $0.\overline{07317}$

Unidad 50 - Combinatoria y probabilidades

Prerrequisitos:
- Operaciones básicas con números y con expresiones algebraicas.

Materiales necesarios:
- Dados.
- *(Para la investigación "El dado dodecaedro"):*
  Cartón o cartulina, tijera, goma, herramientas de dibujo geométrico.

El concepto matemático de probabilidad

En el nivel de *Primaria II (Unidad 82)* hicimos unos experimentos con dados, para probar cuáles números salen con mayor frecuencia. O sea, hemos investigado la *probabilidad* de que salga un número determinado.

En la matemática, la probabilidad se define como el cociente:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Con "casos favorables" entendemos los casos que cumplen con la condición para la cual queremos calcular la probabilidad. Por ejemplo, al calcular "la probabilidad de que el jugador A gane el juego", los casos favorables son todos los casos donde A gana.

Ejemplos:

a) Probabilidad de tirar un 5 con un dado:

Existen 6 casos posibles, porque el dado tiene 6 puntajes diferentes.
El 5 es *uno* de esos 6 casos. Entonces la probabilidad es $\frac{1}{6}$.

b) Probabilidad de tirar un número par con un dado:

El dado tiene 3 números pares (2; 4; 6). O sea, tenemos 3 casos favorables. La probabilidad es $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(En estos cálculos siempre se supone que el dado es "regular". O sea, que todos los números aparecen con la misma probabilidad.)

c) Probabilidad de tirar uno de los puntajes de 1 a 6 con un dado: $\frac{6}{6} = 1$.

Esto es un ***evento seguro:*** Todos los casos son "favorables"; entonces "ganamos" con seguridad. Una probabilidad de 1 significa un evento seguro.

Una probabilidad no puede ser mayor a 1; porque no pueden existir más casos favorables que casos posibles.

d) Probabilidad de tirar un 8 con un dado: $\frac{0}{6} = 0$.

Esto es un ***evento imposible:*** El dado no tiene ningún puntaje de 8; entonces eso nunca va a suceder. Una probabilidad de 0 significa un evento imposible.

Nota: El conjunto de los casos posibles se llama también ***"espacio muestral"***.

Para practicar: *Calcula las siguientes probabilidades:*

1) La probabilidad de que al mirar la hora en un reloj digital, el número de los minutos sea 23.

2) La probabilidad de que el número de los minutos termine con 7.

3) La probabilidad de que el número de los minutos sea menor a 100.

4) La probabilidad de que el número de los minutos sea un número primo.

5) Al sacar al azar una carta de un paquete de naipes barajado (52 cartas), la probabilidad de que sea un as.

6) La probabilidad de que la carta sacada sea de corazones.

7) Se tienen tarjetas con los números de 1 a 100, cada número una vez. Al sacar una tarjeta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número sea un cuadrado perfecto?

8) Al sacar al azar una tarjeta de 1 a 100, ¿cuál es la probabilidad de que el número contenga el dígito 4?

9) En una bolsa hay 14 canicas verdes, 8 amarillas y 5 blancas. Se saca una canica al azar, sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarilla?

La "Ley de los números grandes":

El cálculo de probabilidades no puede predecir eventos específicos. Por ejemplo, al tirar un dado, cada puntaje tiene una probabilidad de $^{1}/_{6}$ de aparecer. Pero eso no significa que al tirar un dado 6 veces, cada puntaje aparezca exactamente una vez. Los eventos individuales son *aleatorios*, o sea, no predecibles.
Lo que sí se puede predecir, es que al hacer *un número muy grande de intentos*, la frecuencia de cada puntaje *se acercará* a $^{1}/_{6}$. (En los experimentos del libro de Primaria II hemos verificado ese hecho.)

El cálculo de probabilidades se puede aplicar solamente a eventos aleatorios; o sea, que no se pueden controlar o planificar con anticipación. Por ejemplo, no tiene mucho sentido hablar de "la probabilidad de que el tren pase por el cruce entre las 8:10 y las 8:30"; porque los trenes suelen circular según un horario predeterminado, no de manera aleatoria.

Por el otro lado, si mi hora de salir de la casa es más o menos aleatoria, entonces sí se podría hablar de una "probabilidad" de que el tren pase justo cuando yo llego al cruce".

Probabilidad y porcentajes

Hasta ahora hemos expresado las probabilidades en fracciones. Pero se pueden expresar también en decimales, o en porcentajes. Simplemente hay que convertirlo como corresponde. *(Vea Unidad 46.)* Así se puede decir, por ejemplo, que un evento seguro tiene una probabilidad de 100% ("es 100% seguro que eso va a pasar"); porque 100% corresponden a 1 entero. Una probabilidad de $^{1}/_{2}$ corresponde a 0.5 ó 50% (o sea, hay la misma probabilidad de que suceda, como que no suceda).

Para practicar: Convierte las probabilidades de los ejercicios 1 a 9 en decimales, y en porcentajes.

Investigación

El dado dodecaedro

Construye un dodecaedro regular de cartulina o cartón. (Un dodecaedro es un cuerpo geométrico cuyas caras son doce pentágonos.) Escribe en cada cara uno de los números de 1 a 12. Ahora puedes usar el dodecaedro para jugar a los dados.
Existen varios juegos de dados donde se deben tirar dos dados juntos, y el puntaje es la suma de los dos dados. De esta manera, el puntaje máximo es 12 (=6+6). Entonces, en vez de dos dados normales se podría usar el dodecaedro. La pregunta es, ¿si eso tiene el mismo efecto?

Siempre consideramos que el dodecaedro es completamente regular; o sea, que cada uno de los números de 1 a 12 aparece con la misma probabilidad. Por supuesto que asumimos lo mismo también respecto a los dados normales: que cada uno de los puntajes de 1 a 6 ocurre con la misma probabilidad.

Por ejemplo, con un(a) amigo(a) puedes probar e investigar los siguientes juegos:

a) Dos jugadores juegan a la competencia; el uno con dos dados normales, el otro con un dodecaedro. Ambos tiran simultáneamente. Gana el que primero tira 12. ¿Es este juego equitativo? O sea, ¿tienen ambos jugadores la misma probabilidad de ganar?

b) En el juego a), ¿cambian las probabilidades de ganar si el número ganador es otro, por ejemplo el 6?

c) Dos jugadores juegan a la competencia; el uno con dos dados normales, el otro con un dodecaedro. Gana el que tira el puntaje mayor. ¿Es este juego equitativo?

***d)** Calcula las probabilidades exactas de ganar para cada uno de los jugadores en los juegos descritos. – Toma en cuenta que un juego puede también terminar en empate.

Nota: *Si eres valiente, investiga estas preguntas ahora. Descubrirás varias leyes del cálculo de probabilidades.*

Alternativamente, puedes continuar con el viaje guiado que sigue. En el transcurso de ese viaje se te ofrecerán unas opciones de volver a esta investigación, después de adquirir más conocimientos acerca del tema.

Unidad 51 - Introducción a las funciones

Prerrequisitos:

- Calcular con expresiones algebraicas *(Unidades 11 a 13)*.
- Ecuaciones simultáneas con dos incógnitas *(Unidad 18)*.
- *(Opcional):* Producto cartesiano de conjuntos *(Unidad 38)*.

Materiales necesarios:

- Papel cuadriculado, regla, escuadra.

[... En esta muestra se omitieron las partes introductorias de esta Unidad. ...]

Viaje de exploración matemática

Grafo y propiedades de funciones lineales

1) Dibuja el grafo de una función de primer grado, como $y = 2x + 3$. ¿Qué figura se produce? ¿Dónde corta el grafo el eje y? ¿Dónde corta el eje x?

2) Sabiendo los coeficientes de una función, ¿cómo puedes calcular los puntos de intersección con los ejes? – Haz dos otros ejemplos de funciones de primer grado, y verifica la ley que encontraste: Calcula los puntos de intersección primero; después dibuja el grafo de la función y comprueba si tu cálculo fue correcto.

3) Dibuja la recta que pasa por los puntos X(12; 0) y Y(0; 4). Encuentra la función que corresponde a esta recta.

4) Generaliza: ¿Cómo puedes determinar la función de una recta, si conoces sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas? – Haz unos ejemplos adicionales, calcula primero los coeficientes de la función, y después dibuja su grafo para comprobar si es igual a la recta dada.

5) Dibuja la recta que pasa por los puntos P(–2; 6) y Q(4; 3). Encuentra la función que corresponde a esta recta.

6) Generaliza: ¿Cómo puedes determinar de manera sencilla la función de una recta, si conoces dos puntos de ella? – Haz unos ejemplos adicionales, calcula primero los coeficientes de la función, y después dibuja su grafo para comprobar si es igual a la recta dada.

***7)** ¿Puedes demostrar que el grafo de una función de primer grado es siempre una recta? – Y el inverso de esta hipótesis, o sea, ¿que una recta siempre representa una función de primer grado?

Funciones lineales: Paralelas y ángulos rectos

8) Dibuja el grafo de una función lineal, por ejemplo $y = 3x/4 - 3$. Construye dos paralelas a esta recta. (De preferencia ubica las paralelas de tal manera que cada una de ellas pase por una intersección de la cuadrícula del papel; o sea, por un punto donde ambas coordenadas, x y y, son enteras.) Determina las funciones de estas rectas paralelas. Compáralas con la función original. ¿Qué concluyes?

9) Con la ayuda del resultado de 8), calcula: ¿Cuál es la ecuación de una paralela a $y = -2x/5 + 8$, que pasa por el punto P(10; 10)? – Si todavía no descubriste cómo calcularlo directamente, dibuja primero el grafo y calcula después. Haz otros ejemplos, hasta descubrir cómo puedes calcularlo directamente.

10) En toda función lineal de la forma $y = ax + b$, ¿cuál es el significado del coeficiente a, respecto a las propiedades del grafo? ¿Y el significado del coeficiente b? ¿Y qué observación hiciste respecto a esos coeficientes, al observar rectas *paralelas*?

11) Dibuja el grafo de una función lineal, por ejemplo $y = 3x - 6$. Construye una recta perpendicular a la primera. (De preferencia de tal manera que pase por un punto con coordenadas enteras que pertenece a la primera recta.) Determina la función de esa recta. Compárala con la función de la primera recta. ¿Qué concluyes? – Si no estás seguro, sigue dibujando y calculando otros ejemplos, hasta que encuentres una regla general que aplica a todos los casos.
(Si tu construcción es exacta, puedes descubrirlo, contando cuadraditos.)

12) Con la ayuda del resultado de 11), calcula: ¿Cuál es la función de una recta perpendicular a $y = x/7 + 3$, que pasa por el punto P(–1; –5)? – Si todavía no puedes calcularlo directamente, dibújalo primero y calcula después. Haz otros ejemplos, hasta que descubras cómo puedes calcularlo directamente.

Generaliza: ¿Cuál es la relación entre los coeficientes "a" (o sea, los coeficientes de x) en dos funciones, si sus grafos son perpendiculares entre sí?

(Nota: Estas tareas no tienen pautas en el Anexo A. La siguiente Unidad (52) contiene un viaje guiado acerca de este mismo tema.)

Unos problemas adicionales

13) Una pulgada (abreviado 1") es igual a 2.54cm. ¿Cuál es la función de conversión de pulgadas a centímetros? ¿y de centímetros a pulgadas?

14) Al medir temperaturas, en la escala usual de grados Celsius, el agua se congela a 0ºC y hierve a 100ºC (a una presión atmosférica normal).
Los grados Kelvin usan la misma escala, pero se define 0ºK como el mínimo absoluto (–273ºC), de manera que 0ºC = 273ºK.

Usa estos datos para establecer las funciones de conversión de ºC a ºK, y viceversa.

15) En la escala de Fahrenheit (que está todavía en uso en los EEUU), el agua se congela a 32ºF y hierve a 212ºF. La fórmula de conversión es una función lineal. Establece las funciones de conversión de ºC a ºF, y viceversa.

16) Grafica las funciones de los problemas 13 a 15.

¿Adónde vamos desde aquí?

Si deseas estudiar el tema de las funciones lineales en forma de un "viaje guiado", pasa a la siguiente *Unidad (52)*.
Si completaste exitosamente el viaje de exploración, puedes también ir directamente a la *Unidad 53*.

Unidad 52 - Funciones lineales y sus grafos (Viaje guiado)

Prerrequisitos:

- Introducción a las funciones *(Unidad 51)*. (No es necesario haber completado el viaje de exploración.)

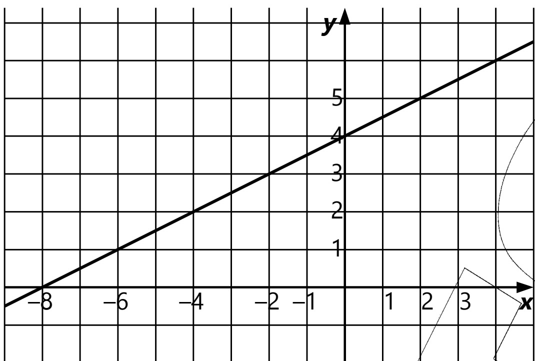
Materiales necesarios:

- Papel cuadriculado, regla, escuadra.

Nota: La numeración de los párrafos en esta Unidad se refiere a las tareas de investigación en la *Unidad 51*.

VIAJE GUIADO Grafo y propiedades de funciones lineales

2) Intersecciones con los ejes de coordenadas:



$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 4$$

Observa el grafo del ejemplo arriba. La línea cruza el eje $\boldsymbol{x}$ en (–8; 0), y el eje $\boldsymbol{y}$ en (0; 4). Si no hubiéramos dibujado el grafo, ¿cómo podríamos calcular esos puntos?

Primeramente, recuerda que el grafo contiene todos los puntos ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) que cumplen la ecuación de la función; en nuestro caso $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 4$. Entonces, esta ecuación se cumple también para las intersecciones con los ejes.

De ambas ya conocemos una de sus coordenadas: Para que un punto pertenezca al eje $\boldsymbol{x}$, su coordenada $\boldsymbol{y}$ tiene que ser igual a cero. Entonces podemos sustituir $\boldsymbol{y}$ por 0 en la ecuación de la función $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 4$:

$$0 = \frac{\boldsymbol{x}}{2} + 4 \qquad | -4$$

$$-4 = \frac{\boldsymbol{x}}{2} \qquad | \cdot 2$$

$$\underline{\boldsymbol{x} = -8}$$

Y para todo punto del eje $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} = 0$. Entonces, para la intersección con el eje $\boldsymbol{y}$, sustituimos $\boldsymbol{x}$ por 0:

$$\boldsymbol{y} = \frac{0}{2} + 4 = 4$$

La ecuación de una función de primer grado se puede escribir de manera generalizada: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$. Así podemos también calcular sus intersecciones con los ejes de manera generalizada, y establecer fórmulas:

Intersección con el eje $\boldsymbol{x}$: ($\boldsymbol{y} = 0$)

$$0 = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$$

Intersección con el eje $\boldsymbol{y}$: ($\boldsymbol{x} = 0$)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \cdot 0 + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

Para practicar: Para las siguientes ecuaciones, calcula las intersecciones de sus grafos con los ejes. Después dibuja los grafos, y verifica si tus cálculos fueron correctos:

a) $y = 3x - 21$

b) $y = \frac{x}{4} + 4$

c) $y = \frac{4x}{5} - 13$

d) $y = \frac{9x}{11}$

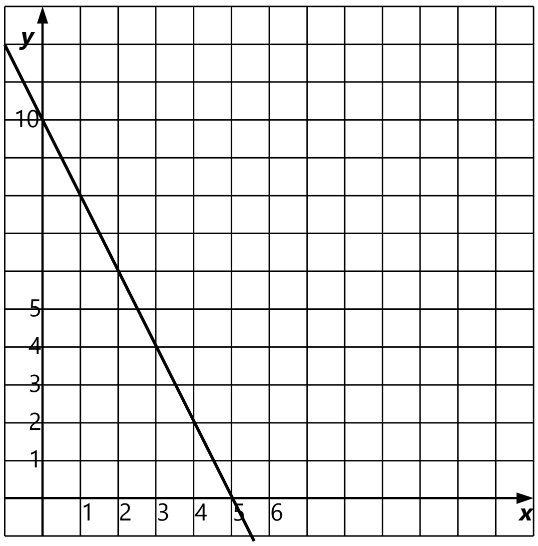
e) $7y = 3x + 11$

f) $8x + 5y = 60$

g) $\frac{4x + 7y}{17} = 0$

h) $\frac{x + 3y}{2} = 9$

3, 4) Determinar una función desde sus intersecciones con los ejes:



En este ejemplo sabemos que las intersecciones con los ejes son (0; 10) y (5; 0). ¿Cómo podemos descubrir la ecuación de esta función?

Recuerda: El álgebra nos sirve para calcular con variables incógnitas, como si ya fueran conocidas. Sabemos que nuestra ecuación debe tener la forma $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$. Solamente que todavía no sabemos cuánto es la $\boldsymbol{a}$ y la $\boldsymbol{b}$; pero podemos descubrirlo. Podemos hacer eso de dos maneras:

A) Las intersecciones con los ejes nos dan dos puntos con ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) conocidos. Podemos sustituir esos en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$, y así tenemos dos ecuaciones:

$$10 = \boldsymbol{a}\cdot 0 + \boldsymbol{b}$$

$$0 = \boldsymbol{a}\cdot 5 + \boldsymbol{b}$$

En la primera ecuación vemos directamente que $\boldsymbol{b} = 10$. Podemos sustituir eso en la segunda ecuación; entonces tenemos:

$$0 = \boldsymbol{a}\cdot 5 + 10 \qquad | -10$$

$$-10 = \boldsymbol{a}\cdot 5 \qquad | \div 5$$

$$\boldsymbol{a} = -2$$

Entonces, la ecuación de la función es $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{x} + 10$.

B) Podemos también usar el resultado de la pregunta 2), y aplicar la operación inversa: Sabemos que las intersecciones con los ejes son $\left(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}};\, 0\right)$ y (0; $\boldsymbol{b}$). Comparamos esto con las intersecciones que conocemos, entonces vemos de frente que $\boldsymbol{b} = 10$. Además, $-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = -\frac{10}{\boldsymbol{a}} = 5$. En esta última ecuación despejamos $\boldsymbol{a}$, y obtenemos $\boldsymbol{a} = -2$ como arriba. *(Completa tú los pasos que faltan.)*

Para practicar: Determina las ecuaciones de las funciones lineales con las siguientes intersecciones con los ejes. Después dibuja los grafos de las funciones, y verifica que sus intersecciones sean las correctas.

a) (12; 0), (0; 9)

b) (–14; 0), (0; 1)

c) $\left(\frac{5}{16};\, 0\right)$, $\left(0;\, -\frac{15}{16}\right)$

d) $\left(-\frac{33}{7};\, 0\right)$, $\left(0;\, -6\right)$

e) (–26; 0), (0; –12)

f) (8.4; 0), (0; –4.9)

g) (12.375; 0), (0; 11)

h) $\left(-1\frac{67}{98};\, 0\right)$, $\left(0;\, 5\frac{25}{182}\right)$

Nota: Para dibujar los grafos, usa un tamaño adecuado para la unidad. Por ejemplo, en c) es mejor usar una unidad grande (quizás 8 cuadrículas, o aun mayor), porque las coordenadas de las intersecciones son menores a 1. En e), en cambio, tendrás que usar una unidad pequeña (1 cuadrícula, o media cuadrícula), para que quepan 26 unidades.
En h) no podrás ubicar los puntos de manera exacta; tendrás que calcular unos puntos a dos decimales, y después aproximarlos en el papel.

5, 6) Determinar una función desde dos puntos dados

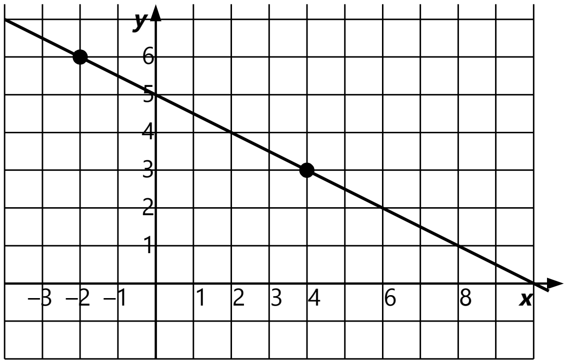
En los ejemplos anteriores sucedió algo extraño, y eso podría dificultar tu razonamiento: Las "conocidas" se convierten en "incógnitas", y viceversa. Estamos acostumbrados a que las letras $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ significan "incógnitas" que se deben descubrir. Pero si sabemos que por ejemplo el punto (–2; 6) pertenece al grafo, entonces *conocemos* $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ en este punto. Lo que no conocemos, son los coeficientes de la ecuación. Sabemos que la ecuación tiene la forma $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$. Pero las "incógnitas" aquí son $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. En cambio, la $\boldsymbol{x}$ y la $\boldsymbol{y}$ podemos sustituir por sus valores, porque ésos son conocidos.

Entonces, si el grafo de una función lineal pasa por los puntos (–2; 6) y (4; 3), podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} 6 = -2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \\ 3 = 4\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{Bmatrix}$$

Podemos resolver esto con uno de los métodos que aprendimos en la *Unidad 18*, y resulta: $\boldsymbol{a} = -\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{b} = 5$. *(¡Verifícalo!)* Entonces la ecuación de la función es: $\boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{x}}{2} + 5$.

(Vea el dibujo siguiente.)



Para practicar: Determina las ecuaciones de las funciones lineales que pasan por los siguientes puntos. Después dibuja los grafos de las funciones, para verificar tus cálculos:

a) (12; 11), (5; 4)

b) (–9; –6), (15; 10)

c) (–7; 15), (–3; 3)

d) $\left(\frac{12}{7};\frac{64}{7}\right),\ \left(-\frac{10}{9};\frac{2}{3}\right)$

e) (4.83; 9.04), (–3.99; 9.04)

f) (–7; 5), (11; –18)

g) (–4.25; 1.2), (0; 0)

h) $\left(-6.6;-0.95\right),\ \left(11\frac{3}{4};\ 10\frac{8}{11}\right)$

Unos problemas adicionales: Si todavía no hiciste los problemas 13 a 16 de la *Unidad 51*, puedes resolverlos ahora.

7) ¿Por qué las funciones de primer grado se llaman "lineales"?

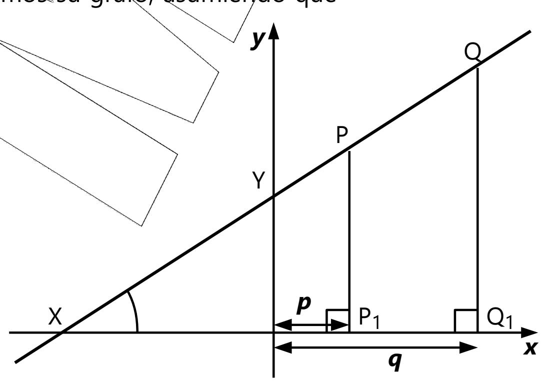
Hasta ahora hemos asumido silenciosamente que los grafos de las funciones de primer grado siempre son líneas rectas; y que la ecuación de una línea recta siempre es de primer grado. Por eso, las ecuaciones y funciones de primer grado se llaman "lineales".

Pero ahora vamos a examinar si eso realmente es cierto, y vamos a demostrarlo (o refutarlo, donde es necesario).

Primero demostraremos que ***el grafo de una función de primer grado es siempre una recta.***

Hemos visto que podemos generalizar nuestra función con $\boldsymbol{y = ax + b}$. Dibujamos su grafo, asumiendo que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sean positivos. (Después, tú mismo(a) podrás verificar que el mismo razonamiento funciona también si uno de ellos es negativo, o ambos.)

Llamemos X y Y sus intersecciones con los ejes.



Elegimos dos puntos P y Q en el grafo, con coordenadas $\boldsymbol{x = p}$, respectivamente $\boldsymbol{q}$. Aplicamos la ecuación de la función, para determinar las coordenadas de los puntos:

$$P(p;\ ap+b),\quad Q(q,\ aq+b).$$

Construimos rectas perpendiculares al eje $\boldsymbol{x}$, que pasan por P y Q. Llamemos las intersecciones que se producen, P_1 y Q_1. Ahora examinamos las propiedades de los triángulos XPP_1 y XQQ_1:

$$XP_1 = p + \frac{b}{a};\qquad PP_1 = ap + b = a\left(p + \frac{b}{a}\right)$$

$$XQ_1 = q + \frac{b}{a};\qquad QQ_1 = aq + b = a\left(q + \frac{b}{a}\right)$$

La última expresión en cada línea resulta de aplicar la ley distributiva: Sacamos $\boldsymbol{a}$ afuera del paréntesis, como un "factor común". Notamos que dentro del paréntesis queda una expresión igual al otro lado del triángulo. O sea:

$$PP_1 = a \cdot XP_1,\qquad QQ_1 = a \cdot XQ_1.$$

Esto significa que estos lados de los triángulos son *proporcionales* entre sí. Además, los ángulos entre estos lados correspondientes son iguales: ángulos rectos en P_1 y Q_1. Por tanto, los dos triángulos son *semejantes*.

(En realidad, eso ya lo sabíamos. Anteriormente ya hemos usado líneas rectas para graficar proporcionalidades. Pero ahora tenemos la demostración matemática de que efectivamente es así, siempre.)

Pero si son semejantes, entonces todos sus ángulos son iguales. En particular, $\sphericalangle P_1XP = \sphericalangle Q_1XQ$. Por tanto, XP y XQ son la misma recta; o sea, X, P, Q son colineales.

Pero lo mismo aplica a *todos* los puntos del grafo que podríamos elegir. Entonces, todos los puntos del grafo son colineales. O sea, el grafo es una recta. Eso es lo que había que demostrar.

(Repasa esta demostración, para asegurarte de entender bien el razonamiento. Completa la demostración para los casos de coeficientes negativos.)

Examinemos ahora la pregunta inversa: ***¿Es toda recta el grafo de una función de primer grado?***

Podemos usar un dibujo similar como arriba, y hacemos el mismo razonamiento al revés. Solamente que usamos Y como vértice de uno de nuestros triángulos; eso simplifica las cosas un poco.

(Vea el dibujo siguiente.)

Unidad 70 - La esfera; Coordenadas geográficas

Prerrequisitos:
- Calcular con expresiones algebraicas *(Bloque II)*.
- Fundamentos de la geometría del espacio *(Unidades 66-67)*.
- Grados, minutos y segundos *(Unidad 24)*.
- *Para algunos de los problemas:* Teorema de Pitágoras *(Unidad 64)*.

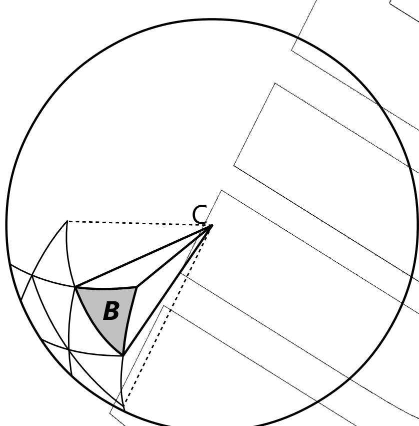
La esfera es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a una misma distancia desde un punto dado *(el centro)*, en el espacio de tres dimensiones.

VIAJE GUIADO

Área (superficie) y volumen de la esfera

$$\boxed{\boldsymbol{A} = 4\boldsymbol{r}^2\pi \qquad \boldsymbol{V} = \frac{4}{3}\boldsymbol{r}^3\pi}$$

Para demostrar que estas fórmulas son correctas, necesitaríamos las herramientas del cálculo integral. Pero la *relación entre las dos fórmulas* se puede fundamentar de manera bastante sencilla. O sea, cuando conocemos *una* de las dos fórmulas, podemos deducir la otra. El razonamiento es similar al que usamos al calcular el área de un círculo *(Unidad 61, 62)*.



Nos imaginamos la esfera cortada en muchos pedazos, desde el centro y con cortes rectos. Cada pedazo tiene como "base" una porción de la superficie de la esfera. Si un pedazo es lo suficientemente pequeño, su base es prácticamente plana. Podemos considerarlo como una *pirámide* con base B, y su punta en C. Sabemos que el volumen de esta pirámide es $\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r}}{3}$.

La esfera entera es la suma de todas estas pirámides. Entonces podemos calcular su volumen como de una única pirámide con base A (superficie de la esfera) y altura ***r***. Por tanto, su volumen es $\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{3}$.

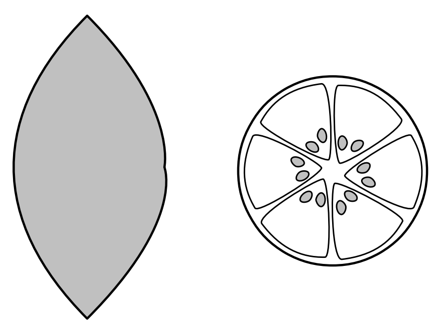
Efectivamente, éste es el resultado si remplazamos ***A*** por la fórmula del área:

$$\boldsymbol{V} = \frac{(4\boldsymbol{r}^2\pi)\cdot\boldsymbol{r}}{3} = \frac{4}{3}\boldsymbol{r}^3\pi.$$

Nota: La fórmula para ***A*** se puede memorizar fácilmente así: ***La superficie es igual a cuatro círculos.*** (Área del círculo = $\boldsymbol{r}^2\pi$.)

Puedes ilustrarlo con el siguiente ***experimento:***

Toma una naranja y córtala en dos mitades. Pon una mitad aparte. Corta la otra mitad otra vez en dos partes iguales. Come una de esas partes, pero deja la cáscara intacta. Aplana la cáscara, y compara su área con el círculo por donde cortaste la mitad. Debe ser aproximadamente igual.



Ya que el pedazo de cáscara es $^1/_4$ de la cáscara completa, la superficie de la cáscara completa es cuatro veces el círculo del corte.

Por supuesto que eso no es una demostración matemática. Pero te ayudará a recordar la fórmula.

Para practicar:

1) Calcula la superficie de una pelota de 38 cm de diámetro.

2) ¿Qué volumen de aire cabe en un globo esférico de 5.60 m de diámetro?

3) ¿Cuál es el diámetro de una esfera cuyo volumen es exactamente un litro?

4) Calcula la superficie y el volumen de nuestro planeta, asumiendo que es perfectamente esférico, y sabiendo que la longitud del ecuador es de 40'000 km. *(En realidad, la Tierra es ligeramente aplanada en los polos. Pero no tomamos en cuenta eso para el cálculo.)*

5) Con 700 cm^3 de acero se fabrica una esfera vacía por dentro, con un radio de 12 cm. ¿Qué grosor tiene la capa de acero?

***6)** Pepe tuvo el privilegio de visitar el planeta Triflux. Un día, su anfitrión le dice: "Hoy vamos a Diplus. No es lejos, apenas dos militriflus." – "¿Y cuánto es un militriflu?", quiere saber Pepe. – "Pues, un milésimo de un triflu." – "¿Y cuánto es un triflu?" – "Veo que todavía te faltan los conocimientos básicos de nuestro mundo. Nuestros sabios han definido el triflu de tal manera que la superficie de Triflux, en triflus cuadrados, es igual al volumen de Triflux, en triflus cúbicos." – "Ajá", dice Pepe, "pero sigo sin saber cuánto es."

a) ¿Cuánto miden la superficie y el área del planeta, en triflus?

b) Si Triflux es del mismo tamaño como la Tierra, ¿a cuántos kilómetros equivale un triflu?

Problemas acerca de las propiedades geométricas de la esfera

Demuestra o refuta:

7.a) El mayor círculo que se puede producir con un corte plano por una esfera, tiene su radio igual al radio de la esfera.

b) ¿Por dónde tiene que pasar un corte para que produzca un tal "círculo máximo"?

***8)** Cada corte plano por una esfera produce un círculo.

***9)** Si se cortan dos esferas, la línea de corte es un círculo.

***10)** Son dados tres puntos cualesquieras A, B, C en la superficie de una esfera. Entonces la esfera se puede cortar con un corte plano en dos mitades iguales, de manera que A, B y C se encuentran en la misma mitad.

***11)** Si un plano es tangente a una esfera con centro C (punto de tangencia T), entonces CT es la normal del plano.

***12)** Una esfera es determinada por 4 puntos de su superficie.

Otros problemas:

13) Una esfera tiene un radio de 53 cm. ¿A qué distancia del centro hay que cortarla con un plano, para que el círculo resultante tenga un radio de 45 cm?

14) Son dados dos puntos cualesquieras A y B en la superficie de la Tierra. ¿Cómo se puede encontrar, en la superficie, la línea más corta que une A con B? *(Nota: Efectivamente, las aerolíneas intentan en lo posible fijar sus rutas a lo largo de esas líneas.)*

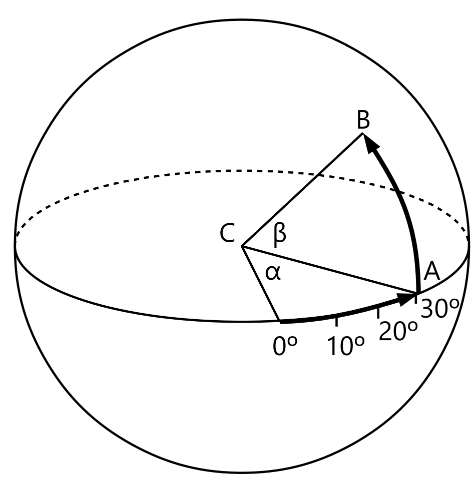
VIAJE GUIADO

Coordenadas geográficas

Cortamos una esfera por su centro con un plano horizontal. El círculo resultante se puede dividir en 360 grados, como un transportador. Ahora cada punto A de la circunferencia está definido por el ángulo α que forma con el punto de "cero grados".

Ahora caminamos desde el punto A verticalmente hacia arriba, a lo largo de la superficie de la esfera, hasta llegar al punto B. Este movimiento se puede definir con un ángulo β en un plano vertical.

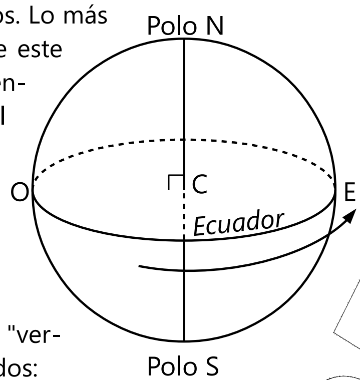
Cada punto en la superficie de la esfera se puede describir mediante estos dos ángulos α y β. O sea, podemos definir un sistema de *coordenadas esféricas.*



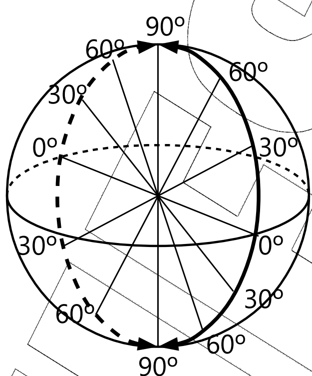
Obviamente, no son coordenadas rectangulares como las coordenadas cartesianas que conoces. Son coordenadas basadas en los ángulos que se forman en el centro de la esfera.

Eso es exactamente lo que se hizo para describir la ubicación de los puntos en la superficie de la Tierra.

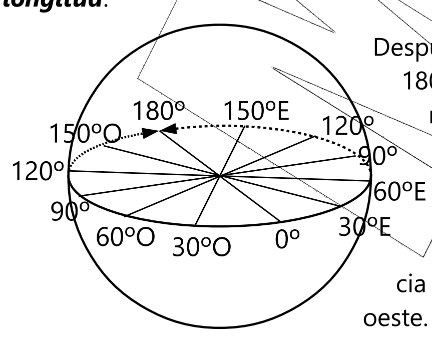
Para eso, primero había que definir qué es "vertical" y qué es "horizontal". La Tierra gira alrededor de un eje que pasa por los polos. Lo más lógico fue definir que este eje es "vertical", y entonces el plano del ecuador es "horizontal". El plano del ecuador se define de manera que el eje es su normal.



Con eso, los ángulos "verticales" (β) son definidos:
El ecuador tiene la coordenada 0º. Desde allí se miden los ángulos de elevación hacia el norte resp. el sur. Esta coordenada en dirección norte-sur se llama ***latitud***.
Si avanzamos en la "vertical" hasta llegar a uno de los polos, la latitud es 90º (un ángulo recto). Si seguimos avanzando, volvemos a "bajar" por el otro lado, y la latitud disminuye. Por eso, la latitud máxima es de 90º.



Todavía falta definir el punto de "cero grados" en el ecuador. No existe ningún punto "privilegiado" en el ecuador, así que se tuvo que definir de manera arbitraria. Se definió que el observatorio astronómico de Greenwich (Londres, Inglaterra) iba a tener la coordenada 0º. Desde allí se miden los ángulos en dirección al este y al oeste. Esta coordenada se lama ***longitud***.

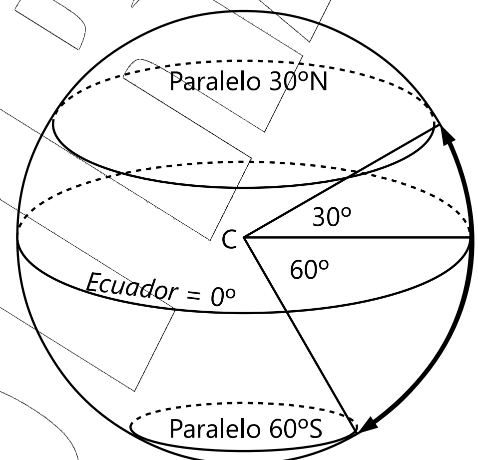


Después de girar por 180º nos encontramos en el lado opuesto de la Tierra, no importa si hemos ido hacia el este o hacia el oeste. Por eso, la longitud máxima es de 180º en ambas direcciones.

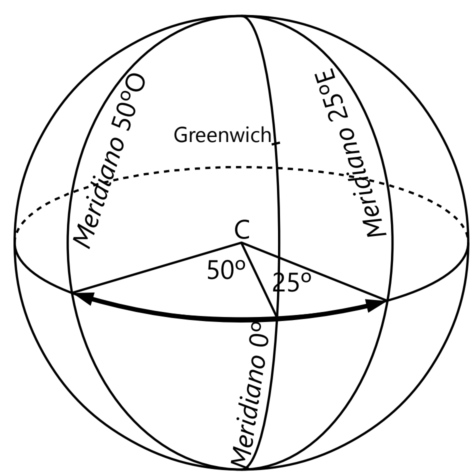
Paralelos y meridianos

Ahora podemos representar estas coordenadas con una cuadrícula, similar a las coordenadas cartesianas. Solamente que la cuadrícula consiste en círculos, no en rectas.

Por ejemplo, podemos dibujar un círculo que une todos los puntos con una latitud de 30ºN (30 grados hacia el norte). Vemos que este círculo es paralelo al ecuador. Por eso, esos círculos se llaman ***paralelos***. El dibujo muestra este paralelo, y también el paralelo de 60ºS.

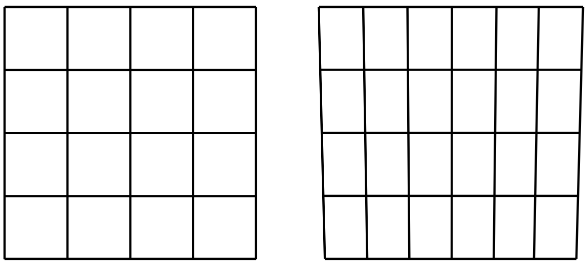


También podemos unir todos los puntos que tienen una longitud de 0º. Resulta un semicírculo "vertical", desde el polo norte hasta el polo sur, que pasa por Greenwich. Estos semicírculos se llaman ***meridianos***. El dibujo muestra este meridiano, y también los meridianos de 50ºO y de 25ºE.



Muchos mapas muestran esta cuadrícula de paralelos y meridianos, para poder ubicar los lugares según sus coordenadas. Podemos observar e investigar unas propiedades:

- Cerca del ecuador tenemos realmente una cuadrícula casi perfecta, como las coordenadas cartesianas. Pero cuánto más al norte o al sur vamos, más "alargada" se ve la cuadrícula. *¿A qué se debe eso?*



(Izquierda: Cuadrícula de un mapa cerca del ecuador. Derecha: Cuadrícula de un mapa cerca de los 45ºS.)

- En mapas que muestran territorios muy grandes, los paralelos y meridianos aparecen curvados, ya no como rectas. Eso es lógico, porque en realidad son círculos y no rectas.

- Para ubicar un lugar con exactitud, no es suficiente indicar sus coordenadas en grados. Se indican en grados y minutos, o incluso segundos *(vea Unidad 24)*. Eso es porque un grado en la superficie de la Tierra es muy grande.

Para calcular: *¿Cuánto mide un arco de un grado en la superficie de la tierra? ¿y un arco de un minuto? ¿de un segundo?*

Nota: Se definió la ***milla náutica*** como la distancia que corresponde a un arco de un minuto en la superficie de la Tierra.

Para hacer: *Averigua las coordenadas geográficas del lugar donde vives.*

Para practicar:

15) Calcula la distancia entre Quito (78º 30' O, 0º) y Macapá (51º 4' O, 0º), midiendo a lo largo del ecuador.

16) Lo mismo para la distancia entre La Serena (71º O, 30º S) y Porto Alegre (51º 10' O, 30ºS), midiendo a lo largo del paralelo.

17) Un problema capcioso

Este es un problema "clásico", pero quizás no lo conoces todavía. Entonces razona bien, antes de ver la solución:

Un cazador sale de su cabaña y camina 200 metros exactamente hacia el sur. Después camina 200 metros exactamente hacia el oeste. Entonces ve un oso exactamente en el norte. Antes que el oso pueda moverse, lo dispara, y camina hasta el lugar donde está el oso muerto. Es una distancia de 200 metros. El oso yace justo delante de la cabaña del cazador. *¿Qué color tiene el oso?*

La rotación de la Tierra y los husos horarios

18) La Tierra necesita 24 horas para una rotación alrededor de su eje. Entonces, ¿cuántos grados gira en una hora?

Si nos desplazamos esa misma cantidad de grados hacia el este o el oeste, entonces la posición del sol en el cielo cambia por esa misma cantidad de grados. Eso significa que la hora local cambia por una hora. Por eso, diferentes países tienen diferentes horas.
Aun si nos desplazamos solamente por cien kilómetros hacia el este o el oeste, notamos que cambia la hora en la que el sol sale y se pone, aunque solamente por unos minutos. Pero normalmente los países definen que dentro de su territorio entero vale la misma hora. Entonces, al viajar a un país vecino, puede que tengamos que adelantar o atrasar el reloj por una hora entera. El mundo se ha dividido en *husos horarios* que se diferencian (normalmente) por una hora entera, y que abarcan países enteros. Aun así, algunos países como Brasil o EEUU, son tan grandes que abarcan varios husos horarios.

19) ¿Cuántas horas de diferencia hay entre Los Ángeles (118ºO, 34ºN) y Río de Janeiro (43ºO, 23ºS) ?

20) Rebeca viaja de Huancayo a Lima. El día siguiente nota que el sol sale 7 minutos más tarde que en Huancayo. ¿A qué se debe eso? ¿Cuántos grados y minutos de diferencia debe haber entre las longitudes geográficas de Huancayo y Lima?

***21)** Julio se encuentra en Belgrado (20º 30' E, 45ºN), y viaja 550 km hacia el este. ¿Cuántos minutos más temprano sale el sol en ese lugar, en comparación con Belgrado?

Unidad 74 - Problemas diversos de repetición e investigación

1) En el día de tu cumpleaños, ¿qué fracción del año pasó? – Exprésalo también en decimales.

2) ¿Existen dos meses en un mismo año que coinciden en el número de días que tienen, y cuyos días caen en los mismos días de la semana?

3.a) Dámaris encontró una agenda del año 2019 que quedó sin usar. ¿Cuál sería el siguiente año que coincide con 2019 en sus días de la semana, de manera que podrá usar la agenda en aquel año?
b) ¿y si la agenda encontrada fuera del año 2020?

4) Se elige al azar un número natural n. ¿Cuál es la probabilidad de que $n^3 - n$ sea divisible entre 24?

5) Se elige al azar un número natural n. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de $n \cdot (n+1)$ termine con la cifra 2?

---

6) "El número que cuenta sus propios dígitos"

Se busca un número de 10 dígitos con la siguiente propiedad: Las posiciones de los dígitos se enumeran en orden, desde la posición 0 hasta la posición 9. Ahora, la cifra que se encuentra en la posición 0 debe indicar cuántos ceros contiene el número completo; la cifra en la posición 1 debe indicar cuántos unos contiene el número, y así sucesivamente hasta la posición 9, cuya cifra debe indicar cuántos nueves contiene el número. ¿Cuál es este número?

Por si la explicación fuera difícil de entender, aquí un ejemplo de un número de 5 cifras que cumple la condición: 21200. En la "posición 0" hay un 2, y efectivamente el número tiene 2 ceros. En la "posición 1" hay un 1, y el número contiene 1 uno. En la "posición 2" hay un 2, y el número contiene 2 veces la cifra 2. En las posiciones 3 y 4 hay ceros; y el número no contiene ningún 3 y ningún 4.
Se debe encontrar ahora un número de 10 cifras con esta misma propiedad.

---

7) La mesa inestable

Una mesa de cuatro patas está parada sobre un piso desigual, y por eso se mueve. Yo digo que tan solamente con girarla horizontalmente en su lugar, se puede lograr que las cuatro patas de la mesa estén firmemente paradas sobre el piso – sin tener que poner algo debajo, y sin hacer algún cambio en la forma del piso o de la mesa. ¿Puedes demostrar que esta afirmación es cierta? ¿O puedes refutarla, en el caso de que es falsa?

Cómo condición adicional, contamos con que la mesa está construida de manera "recta"; o sea, los extremos de sus cuatro patas se encuentran en un mismo plano. Por supuesto que no funcionaría si la mesa estuviera desigual, y el piso completamente plano.

(Fuente de este problema: Keith Devlin, Curso a distancia "Introduction to Mathematical Thinking", coursera.org.)

---

8) "¿Cuánto mide tu campo cuadrado?", pregunta Manuela a Elisa. – "6900 m^2. Pero no es exactamente cuadrado. Un lado mide 17 metros más que el otro." ¿Cuánto miden los lados del campo?

9) En un terreno cuadrado se encuentra una casa, también cuadrada, cuyos lados miden $^1/_5$ de los lados del terreno. El terreno alrededor de la casa mide 3042 m^2. ¿Cuánto miden los lados del terreno?

10) El señor Castillo compra un terreno rectangular de 125 m^2 para construir una casa. El perímetro del terreno mide 48 m. ¿Cuánto miden sus lados?

11.a) Un círculo está inscrito en un triángulo equilátero. ¿Qué porcentaje del área del triángulo ocupa el círculo?
b) ¿Qué porcentaje del área de un hexágono regular ocupa un círculo inscrito en él?
***c)** ¿Y en el caso de un pentágono regular?

12) Campo desigual

Para nivelar grandes terrenos con exactitud, existe una tecnología de láser. Así me lo explicó un productor de arroz: En el medio del campo se instala un aparato que emite rayos láser en dirección exactamente horizontal. Las máquinas que se usan para nivelar, contienen un sensor que capta el rayo y señala al maquinista si la altura es correcta. Esta tecnología permite nivelar terrenos con una exactitud de un centímetro.

Ahora, según dicen, un dueño de un campo grande alquiló un tal equipo. Quiso tener un campo plano para que no se formasen lagunas con el agua de la lluvia. Pero cuando el trabajo estaba acabado, y vino la primera lluvia fuerte, los bordes del campo estaban secos, mientras que en el medio se había formado una laguna de diez centímetros de profundidad. El señor llamó al ingeniero responsable del equipo y le describió el problema. El ingeniero preguntó: "¿Qué tamaño tiene el campo?" – "Tanto ... ¿por qué? ¿Hay un problema con el láser cuando el campo es grande?" – "No, el láser funciona perfectamente. Pero con un campo tan grande como el suyo, interviene un factor adicional que usted no tomó en cuenta ..."

¿A qué se refirió el ingeniero? – Y suponiendo que el campo era cuadrado, ¿qué área tenía, aproximadamente?

---

13) Vuelo contra el viento

Tres pilotos están conversando. Sánchez dice:
- "Un viento inusual hubo en esos últimos días, ¿verdad?"
- "Sí", responde Mendieta. "De 80 km/h, a la altura que yo vuelo. Y constante, durante tres días seguidos."
- Sánchez: "En mi ruta igual. En la ida me ayudó. Mi avioneta va a 400 km/h, pero esa vez se le añadió la velocidad del viento. Solamente que el regreso se hizo más lento, porque el viento estuvo en contra. Pero supongo que en el total, los dos efectos se anulan."
- Mendieta: "O sea, ¿que el total del tiempo de ida y de regreso sería el mismo como lo normal? No estaría tan seguro de eso. ¿Cuánto mide tu ruta?"
- "2400 km. ¿Y la tuya?"
- "Exactamente 4940 km. En mi ruta, el viento estuvo en contra en la ida, y demoré una hora y 44 minutos más que en el regreso."
- "¿Regresando con el viento?", pregunta León, el tercer piloto.
- "Sí, el viento siguió igual en el regreso."
- "No sé si la velocidad del viento era la misma en mi ruta", dice León, "pero también sentí un efecto. Mi ruta mide 4500 km, y mi avión vuela a 675 km/h. En la ida y el regreso juntos demoré esta vez 10 minutos más de lo normal. No es mucho, pero debe haber sido a causa del viento."

Ahora que escuchaste la conversación, responde a las siguientes preguntas:
a) ¿Es correcto que el viaje total de Sánchez (ida y regreso juntos) duró el mismo tiempo como lo normal? ¿O cuánto fue la diferencia?
b) ¿Cuál es la velocidad normal del avión de Mendieta?
c) ¿Cuál fue la velocidad del viento en la ruta de León, suponiendo que fue la misma en la ida como en el regreso?

---

14) *El siguiente problema se remonta a Herón de Alejandría, un matemático de la antigua Grecia:*

Un reservorio de agua tiene cuatro entradas para el suministro del agua. Si la primera entrada está abierta, el reservorio se llena en un día. Si la segunda entrada está abierta, se llena en dos días. La tercera entrada demora tres días, y la cuarta cuatro días, para llenarlo. ¿En cuánto tiempo se llena el reservorio, si todas las cuatro entradas están abiertas?

---

15) Los lados de un cuadrado se incrementaron en $\sqrt[4]{3}$ m. En consecuencia, el área del cuadrado aumentó en un número entero de m^2.
a) ¿Cuánto midió el lado del cuadrado original? – Exprésalo con el denominador racionalizado.
b) Encuentra una fórmula que expresa todas las soluciones. Escríbela con el denominador racionalizado.

16) Los lados de un cubo se incrementaron en 16 cm. En consecuencia de esta operación, su volumen aumentó en 41'680 cm^3. ¿Cuánto midió el lado del cubo original?

Anexo A: Pautas y soluciones

¡Usar con sabiduría! - Lee en la introducción: "Cómo usar las pautas y soluciones".

Unidad 28: Polígonos

Ángulos en polígonos regulares:

8) Ciertas descomposiciones pueden contener un número ilimitado de polígonos, de manera que existen infinitas posibilidades. Por ejemplo, en vez de partir un cuadrado en cuatro cuadrados pequeños, podemos partirlo también en 25 cuadrados, o en 961 – o en prácticamente cualquier cantidad de cuadrados, aun en 7 ó en 14, si los cuadrados pequeños pueden tener tamaños distintos entre sí.

Es interesante que un hexágono regular se puede partir en dos hexágonos regulares y seis triángulos equiláteros; o también en *tres* hexágonos regulares y seis triángulos equiláteros. ¿Descubres cómo?

Para los siguientes razonamientos puedes nuevamente examinar los ángulos: ¿Para cuáles polígonos regulares pueden existir tales descomposiciones? – ¿Puede existir una tal descomposición que contiene *pentágonos* regulares?

(Para tu información: Existen cuatro polígonos regulares distintos que se pueden descomponer según las condiciones del problema.)

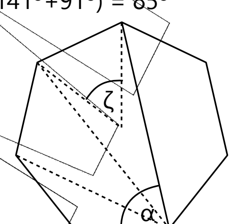
9) Este problema puede resolverse de manera similar como el de los patrones regulares (o sea, con una única clase de polígonos). Cuando hicimos eso en la primaria, examinamos los ángulos que se juntan en un vértice. Para juntar varios polígonos alrededor de un vértice, sus ángulos tienen que sumar 360°. Eso se cumple en el ejemplo que se dio junto con el problema: En cada vértice hay un total de tres triángulos equiláteros y dos cuadrados. Sus ángulos son: 3·60° + 2·90° = 360°.

El problema se reduce entonces a encontrar combinaciones de ángulos (de polígonos regulares) que suman 360°, y después evaluar para cada combinación si permite repetirla en cada vértice. Existen en total ocho patrones que cumplen las condiciones. ¿Los puedes ahora encontrar todos?

13) 720° – (57°+133°+105°+108°+141°+91°) = 85°

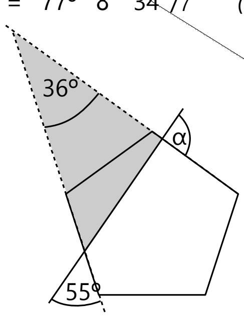
14) α = ζ/2 = 20°

15) α = 3ζ/2 = $77^1/_7$°
= 77° 8' $34^2/_7$" *(Dibujo a la derecha.)*

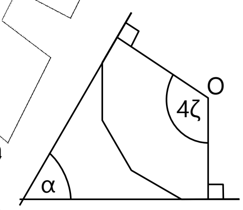


16.a) 81°, **b)** 45. (α = 90° – 180°/*n*.)

17) 180° – (55°+36°) = 89° *(Dibujo a la izquierda.)*



18) *(Dibujo a la derecha)*
α = 180°–4ζ = 180° – 1440°/*n*
a) 90°, b) 25



19.a) Los ángulos en C, G y K son cada uno 4· ζ/2 = 60°.

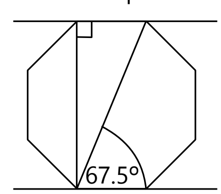
b) Se podría demostrar como en a) que los ángulos en los vértices son rectos; entonces habría que demostrar adicionalmente que los lados son iguales (por las simetrías del polígono regular). – O más fácil: Se construyen los radios desde el centro hacia B,E,H,K. Los ángulos entre los radios son cada uno 3· ζ = 90°. O sea, son dos diámetros que se cortan en la mitad y en ángulo recto; por tanto son las diagonales de un cuadrado.

c) Un trapecio isósceles con ángulos de 75° y 105°.

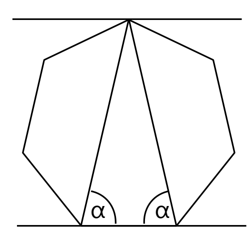
20) La apotema forma con un radio (hacia el vértice) un ángulo de 360°÷(12·2) = 15°, y con el lado un ángulo recto. Construye este triángulo (ALA); así tienes las medidas del radio y también del medio lado. Con eso puedes completar el dodecágono.

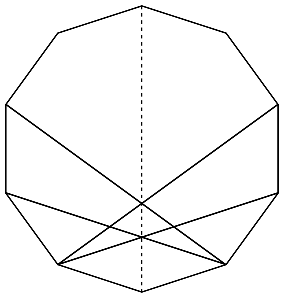
21) Una diagonal forma con dos lados un triángulo isósceles con un ángulo de 108° (en el vértice) y dos ángulos de 36° (entre diagonal y lado). Construye este triángulo (ALA), y completa el pentágono.

22) La diagonal mayor (diámetro) forma con las paralelas unos ángulos de 67.5°. (Calcula...) La otra diagonal es perpendicular a las paralelas. Construye entonces estas dos diagonales; después completa el octágono.



23) Las diagonales mayores forman con una de las paralelas un triángulo isósceles con ángulos α = $77^1/_7$° (vea Problema 15). Construye este triángulo; después completa el heptágono.





***24)** Verdadero. Por causa de las simetrías en un polígono regular, podemos escoger un radio hacia un vértice como eje de simetría. Si el número de lados es par, la prolongación de este radio (o sea, el diámetro) es también una diagonal. Ahora, toda diagonal que corta el eje de simetría y no es perpendicular a él, tiene otra diagonal simétrica a ella que corta el eje del simetría en el mismo punto. Así tenemos una intersección triple.
Tenemos esta misma situación en cada vértice; eso nos da un mínimo de ***n*** intersecciones triples. Y además el centro: allí se cortan todos los diámetros. Así tenemos por lo menos ***n***+1 puntos que cumplen la condición.
El dibujo muestra un decágono; allí vemos que ya se producen dos de estos puntos para cada vértice; entonces tenemos incluso 2***n***+1 intersecciones triples. A medida que ***n*** aumenta, el número de intersecciones triples aumenta mucho más ... pero eso nos llevaría a una investigación más avanzada.

Unidad 37: Investigaciones y problemas diversos

Un nuevo truco de Alberto

Alberto pidió sumar todos los números que resultan de las permutaciones *(vea Unidad 50)* de 4 cifras ***a***, ***b***, ***c***, ***d***. Existen 24 permutaciones. De ésas, exactamente 6 contienen en las unidades la cifra ***a***, 6 la ***b***, 6 la ***c***, y 6 la ***d***. Entonces, la suma de las unidades es $6\cdot(a+b+c+d)$. Pero lo mismo aplica a las decenas, a las centenas, y a los millares. Así que la suma final es $6666\cdot(a+b+c+d)$.
Con la operación inicial, Alberto asegura que la suma $a+b+c+d$ tenga unas propiedades particulares. Son las cifras de la diferencia entre un número $\overline{efgh}$, y su "reverso" $\overline{hgfe}$. Esta diferencia es:

$(1000e + 100f + 10g + h) - (1000h + 100g + 10f + e)$
$= 999(e - h) + 90(f - g)$.

Eso es un múltiplo de 9, así que la suma de sus cifras también debe ser un múltiplo de 9. Pero podemos decir aun más: La suma de sus cifras siempre es 18.
Verifícalo: En un múltiplo de 999, la suma de las cifras es 27. Pero esos contienen dos veces el 9 en el medio, y Alberto excluyó los números con cifras repetidas. Si le sumamos o restamos 90, desde una vez hasta un máximo de 9 veces, esos dos nueves cambian a números menores, de manera que la suma de las cifras llega a ser 18.
Entonces la suma final es cada vez la misma: $18 \cdot 6666 = 119'988$.

Residuos cuadráticos:

b) Las propiedades más notables son ciertas *repeticiones* y *simetrías* en las sucesiones de los residuos. Para explicar el por qué de esas propiedades, te puede ayudar el álgebra. Recuerda que un número que deja el residuo ***r*** al dividir entre ***n***, puede escribirse como ***kn + r*** (donde ***k*** es un número entero).
c) Esta pregunta puede conducirnos a un tema bastante importante de la aritmética modular. En la *Unidad 31* hemos elaborado unas "tablas de multiplicación modular". Allí ya nos encontramos con el mismo tema: hay una diferencia notable entre estas tablas "módulo ***n***", dependiendo de si ***n*** es primo o compuesto. Algo muy similar observamos en los residuos cuadráticos.
(Efectivamente, elevar un número al cuadrado es también una multiplicación.) Sigue investigando...
d) Cuando calculamos "módulo ***n***", entonces podemos simplemente decir ***–a*** en vez de ***n – a***, porque los dos son congruentes. Este es uno de los temas donde es ventajoso calcular con "residuos negativos".
¿Qué operaciones se pueden realizar con cuadrados perfectos, de manera que el resultado sea nuevamente un cuadrado perfecto? – Recuerda los principios de la congruencia modular: Estas mismas operaciones puedes efectuar con los residuos, y el resultado debe nuevamente ser un residuo cuadrático.
Y por fin, fíjate en las situaciones donde aparece –1 como residuo cuadrático. Compara las propiedades de los residuos cuadráticos para aquellos ***n*** donde –1 es un residuo cuadrático, y para aquellos ***n*** donde no lo es. (No olvides que puedes expresar algunos residuos con números negativos.) Encontrarás unas propiedades interesantes. ¿Puedes fundamentarlas?
f) La pregunta conduce casi directamente a la respuesta. Solamente los números con determinados residuos (módulo 4) pueden escribirse como sumas de dos cuadrados perfectos, los otros no.
Interesantemente, esta propiedad aplica solamente a los residuos módulo 4, pero no módulo otros números.

La constante de Kaprekar

Hemos visto en el "truco de Alberto", que estas diferencias entre un número y su "reverso" tienen unas propiedades particulares. Al repetir la "operación de Kaprekar", a partir del segundo paso aparecen solamente números con estas propiedades. Entonces podemos limitar la investigación a ésos.

Con 3 cifras, las diferencias son:

$\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99(a-c)$,

entonces aquí nos interesan solamente los múltiplos de 99. Encontrarás que uno de ellos es la constante con la que todo termina.

Con 5 cifras tenemos:

$(10000a + 1000b + 100c + 10d + e) - (10000e + 1000d + 100c + 10b + a)$

$= 9999(a - e) + 990(b - d)$.

Entonces aquí también, las diferencias son múltiplos de 99. Encontrarás además que su cifra del medio es siempre 9. Entonces el número con las cifras en orden descendiente comienza siempre con 9. Por tanto, tenemos que examinar solamente los múltiplos de 99, desde 90'000 hasta 99'999. – Además, muchos de ésos resultan ser iguales cuando los ordenamos en orden descendiente. Así que todavía es factible hacer la investigación "a mano". Encontrarás que aquí no hay ninguna "constante". Dependiendo del número inicial, la operación termina en uno de dos "círculos", de cuatro números cada uno, que se repiten.

En sistemas con otras bases aplican propiedades similares. Si llamamos ***B*** a la base, con 3 cifras la diferencia sería:

$\overline{abc} - \overline{cba} = (B^2a + Bb + c) - (B^2c + Bb + a) = (B^2-1)(a-c)$.

Entonces, aquí las diferencias son múltiplos de B^2-1. Si conoces las reglas de divisibilidad en otras bases *(Unidad 32, "Ampliaciones")*, podrás fácilmente reconocer esos múltiplos. Sigue investigando ...

Unidad 46: Decimales y fracciones

Pregunta curiosa: No es un invento mío; el "ácido periódico" realmente existe. ¡Pero no tiene nada que ver con un "período"! El origen de las dos palabras es completamente distinto.

La palabra "período" viene del griego "perí-odós", que significa "un camino alrededor", o sea "una vuelta" que se repite (por ejemplo de una rueda que gira). A eso nos referimos cuando hablamos de "números decimales periódicos".

El "ácido per-**<u>iód</u>**ico", en cambio, es un compuesto que contiene **<u>iodo</u>**; y el prefijo "per-" indica su número de oxidación (como en "perclórico", "peróxido", etc).

3) (El razonamiento de Jaime): $^9/_{75}$ se puede simplificar, y sale $^3/_{25}$. Ahora desapareció el factor 3 del denominador. 25 tiene solamente factores 5; entonces su representación decimal es finita.

O sea, para aplicar la regla correctamente, tenemos que aplicarla a fracciones *irreducibles*.

Viaje de exploración – Pregunta 5) Aquí también puedes examinar los *residuos* que se producen al dividir. Dado un denominador ***n***, ¿cuántos residuos distintos son posibles, al máximo? Eso te da la longitud *máxima* posible del período.

Pero encontrarás que en muchos casos, la longitud *efectiva* del período es menor que la longitud máxima posible. Eso requiere una investigación aparte, y es un poco más exigente. Por eso, las siguientes preguntas y pautas tienen una estrellita.

*) Al efectuar la división, ¿pueden aparecer como residuos *todos* los números menores que el denominador? – Primeramente, tenemos que asegurarnos de que tenemos una fracción *irreducible*. Después, examina: ¿Existen residuos que no pueden aparecer, por alguna otra razón? Por ejemplo, si dividimos entre 12, ¿bajo cuáles circunstancias puede darse un residuo de 2? ¿Qué significaría eso para los residuos de los pasos siguientes? ¿Y qué significa eso para el dividendo original (o sea, el numerador de la fracción)? En consecuencia, ¿podría aparecer un residuo de 2 al dividir 1÷12? ¿Por qué sí, o por qué no? – Al dividir 1÷21, ¿podría alguna vez darse un residuo de 9? Haz los mismos razonamientos como antes. Puedes también suponer que estás dentro de una división, y ya apareció un residuo de 9, y sigues dividiendo desde allí. O sea, comienzas una división con un "residuo" de 9. Observa lo que pasa con los residuos siguientes, y saca tus conclusiones.

Los temas relacionados con la congruencia modular (Bloque IV) pueden ayudarte a entender mejor este asunto.

Probablemente no encuentres ninguna regla que te permita predecir la longitud *efectiva* del período, para cualquier denominador ***n***. Pero se puede encontrar una regla para su longitud *máxima* (que en muchos casos es menor a ***n***–1). Y se puede demostrar (con métodos más avanzados) que la longitud efectiva es siempre un divisor de esa longitud máxima. ¡Sigue investigando!

Pregunta 6) Habrás notado que 142'857 son las cifras que se repiten en la representación decimal de 1/7. Entonces, si lo multiplicamos por 7, estamos de cierta manera calculando la representación decimal de 7/7. Solamente que al calcularlo de esta manera, no resulta 1.0; resulta 0.999999... De aquí ya podemos sacar las

siguientes conclusiones:
- La expresión 0.999999... (repitiéndose infinitamente) es igual a 1.0.
- 999'999 es divisible entre 7.

Ahora puedes examinar las representaciones decimales de fracciones con otros denominadores, y encontrarás propiedades similares. Estas observaciones permiten sacar unas conclusiones interesantes acerca de la divisibilidad de números que consisten en puros nueves (99; 999; 9999; etc).

Incluso se puede generalizar esta investigación para sistemas de numeración con otras bases (vea en la sección "Ampliaciones" de esta misma Unidad). Volveremos a este tema en el nivel de Secundaria II. Pero quizás puedes ahora ya encontrar unas propiedades interesantes.
Continúa en el viaje guiado, acerca de la conversión de números decimales periódicos en fracciones. Con eso ganarás un entendimiento adicional del tema de esta pregunta.

Unidad 70: La esfera; Coordenadas geográficas

Área y volumen de la esfera:

1) 4536 cm^2 (¡Los 38cm son el *diámetro*, no el radio!)

2) 92m^3

3)
$$\frac{4}{3}\boldsymbol{r}^3\pi = 1000\text{cm}^3$$
$$\boldsymbol{r}^3 = \frac{1000\cdot 3}{4\pi}$$
$$\boldsymbol{r} = 10\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 6.2\,; \qquad \boldsymbol{d} = 12.4\text{cm}$$

(Calcula la raíz cúbica con una calculadora científica. Si no tiene función de raíz cúbica, usa la función de potencia con un exponente de 1/3.)

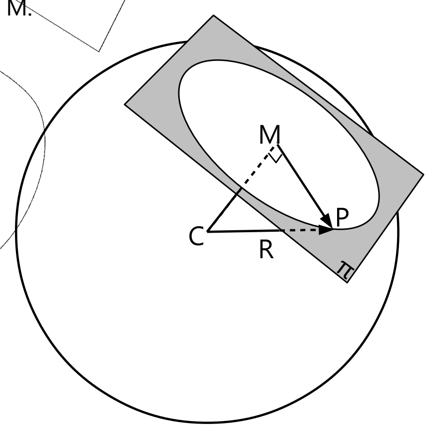
4) A = 509'295'818 km^2, V = 1'080'759'292'185 km^3

5) El volumen de acero es la diferencia entre dos esferas: la esfera completa (***R***=12cm), y el espacio vacío por dentro (con radio ***r*** desconocido). Entonces:
$$700 = \frac{4}{3}\pi\cdot(12^3 - \boldsymbol{r}^3)$$
$$\frac{3\cdot 700}{4\pi} = 12^3 - \boldsymbol{r}^3$$
$$\boldsymbol{r}^3 = 12^3 - \frac{525}{\pi}$$
$$\boldsymbol{r} = \sqrt[3]{1728 - \frac{525}{\pi}} = 11.6\text{cm}$$
El grosor es 12 – 11.6 = 0.4 cm.

*6.a) En toda esfera, $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{3}$. Para que los valores numéricos de ambos lados sean iguales, $\frac{\boldsymbol{r}}{3} = 1$, entonces ***r***=3 (triflus). Por tanto, V = A = 36π.
b) Según la solución de *a)*, un triflu es un tercio del radio, entonces 40'000÷(6π) = 2122 km.

Problemas acerca de las propiedades geométricas de la esfera:

7.a) Existen diversos razonamientos para demostrar eso. Por ejemplo: La máxima distancia entre dos puntos de una esfera con radio ***R*** es 2***R***. Pero en un círculo con un radio >***R***, existen puntos que tienen entre sí una distancia >2***R***. Estos dos puntos no pueden ambos pertenecer a la esfera. Por tanto, ese círculo no puede ser un corte de la esfera.
b) Por el centro. Vea la demostración de 8) abajo: De allí podemos concluir que cada corte que no pasa por el centro, produce un círculo con un radio menor a ***R***.
*8) Una demostración geométrica:
Construimos desde C la normal al plano. Ésta corta el plano en M.



Elegimos un punto cualquiera (P) en la línea de corte. Considera el triángulo CMP:
Tiene un ángulo recto en M (por construcción).
CP = R (por la definición de la esfera).
CM es constante.
MP (=***r***) = $\sqrt{\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{CM}^2}$ (por el teorema de Pitágoras).
R y CM tienen la misma longitud para cada punto P en la línea de corte. Por tanto, MP (=***r***) también es constante. Cada P es un punto de una circunferencia con centro M y radio ***r***. Eso es lo que había que demostrar.
(Alternativamente, se puede razonar que todos los triángulos CMP son congruentes: CM y CP constantes; ángulo recto en M.)

Otra demostración:

Toda recta que pasa por el centro de la esfera, es un eje de simetría rotacional perfecta. O sea, la esfera puede rotarse por *cualquier* ángulo, y coincide consigo misma. (Eso es una consecuencia de la definición de la esfera.) Además, toda normal a un plano infinito es un eje de simetría rotacional perfecto: El plano puede rotarse por

cualquier ángulo alrededor de una normal, y coincide consigo mismo. (Eso es porque toda recta contenida en el plano es perpendicular a la normal.)
Por tanto, CM es eje de simetría rotacional tanto de la esfera como del plano. Entonces es también un eje de simetría de la intersección de ambos. Pero la única figura plana con simetría rotacional perfecta es el círculo. Por tanto, la intersección es un círculo.

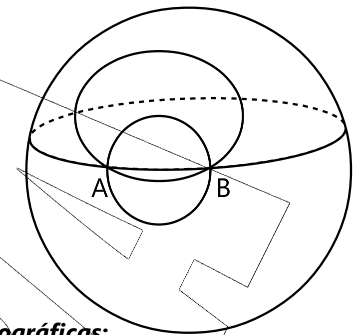
*9) Sean C_1, C_2 los centros de las esferas, y P un punto en la línea de corte. Entonces puedes razonar como en 8): Todos los triángulos C_1C_2P son congruentes, etc ... (Completa tú mismo la demostración.)
O usando simetría rotacional: El eje, en este caso, es C_1C_2. La línea de corte se encuentra en un plano normal al eje. (Construye la intersección de la figura entera con el plano C_1C_2P, y razona con las propiedades de los círculos, para demostrar que el eje es la normal.)
*10) Tres puntos definen un círculo. Un círculo en la superficie de una esfera no puede tener un radio mayor al radio ***R*** de la esfera (vea 7.a). Entonces se puede encontrar un "círculo máximo" que encierra el círculo ABC, y por tanto los puntos mismos. El plano de este "círculo máximo" pasa por el centro de la esfera (vea 7.b). Por tanto, parte la esfera en dos mitades iguales, y una de estas mitades contiene A, B, y C.
Excepción: ¡A,B,C podrían ubicarse en un tal "círculo máximo"! En este caso no existe ningún círculo máximo que los encierre; y en este caso *el enunciado es falso*.

*11) En el plano tangente, dibujamos cualquier recta que pase por T. Construimos el corte con el plano que contiene la recta y C. En este plano, la recta es una tangente al círculo de corte, con T como punto de tangencia. Por tanto, la recta es perpendicular a CT.
Lo mismo aplica a *todas* las rectas del plano que pasan por T. Por tanto, CT es la normal.

*12) Tenemos los puntos A,B,C,D. El L.G. de los puntos que tienen la misma distancia de A y B, es el plano perpendicular a AB, pasando por el punto medio entre A y B. *(Vea Unidad 67)* Lo mismo para los puntos que tienen la misma distancia de B y C, y de C y D. Eso da tres planos, que tienen su intersección común en un punto. Ese punto es el centro de una esfera con A,B,C,D en su superficie. Es el mismo razonamiento como para el circuncírculo de un triángulo *(Unidad 27)*, solamente extendido al espacio.

13) Vea el razonamiento en 8): $\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{R}^2 - CM^2$. Entonces la distancia $\boldsymbol{CM} = \sqrt{\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2} = \sqrt{53^2 - 45^2} = 28.$

14) Podemos cortar la esfera con distintos planos que pasan por A y B. Cada uno produce un "camino" de A a B. Estos caminos son arcos de círculos con distintos radios. Notamos que el arco más corto es el que pertenece al círculo con el radio mayor, o sea a un círculo máximo. En otras palabras: El plano de corte tiene que pasar por el centro, para que el camino sea el más corto.



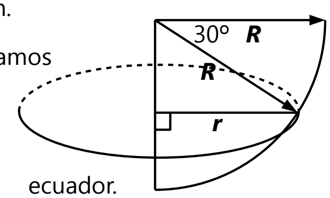
Coordenadas geográficas:

La cuadrícula alargada:
Observa los dibujos: Todos los meridianos son arcos de círculos máximos. Los paralelos, en cambio, se vuelven más pequeños al acercarse a los polos. Por eso, en latitudes mayores, un grado en un paralelo mide menos que un grado en un meridiano.

Para calcular:
$1° = \frac{40'000}{360} = 111^1/_9$ km; 1' ≈ 1852 m; 1" ≈ 30.86 m

15) El camino es a lo largo del ecuador, cuya longitud corresponde a un "arco" de 360°. Entonces, un arco de 27°26' (diferencia de las longitudes) mide:

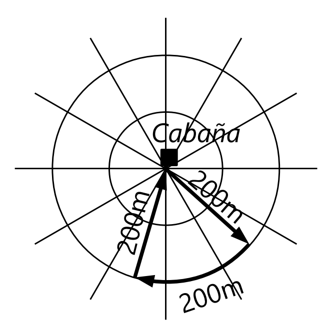
$$40'000 \cdot \frac{27+\frac{26}{60}}{360} = 3048\,\text{km}.$$



16) Similar; pero ahora estamos en el paralelo de 30°S. El tamaño de este paralelo está en proporción de $\sqrt{3}/2$ respecto al ecuador. Entonces, un arco de 19°50' mide:

$$40'000 \cdot \frac{19+\frac{50}{60}}{360} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1908\,\text{km}.$$

17) Un problema capcioso:
Esta situación se puede dar solamente en el polo Norte. Por tanto, tiene que ser un oso polar. El oso es blanco.



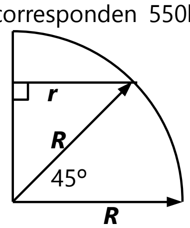
Husos horarios:

18) 360° ÷ 24 = 15°

19) La hora depende de la rotación de la Tierra de oeste a este. Entonces son solamente los grados de longitud que nos interesan. Su diferencia es 118° – 43° = 75°; entonces 75÷15 = 5h.

20) La rotación de la Tierra en un minuto es de 15°÷60 $= ^1/_4° = 15'$. Entonces la diferencia en longitud es 7·15' = 1°45'.

*21) Calculamos a cuántos grados corresponden 550km en el paralelo de 45ºN. Podemos calcular el radio de este paralelo, usando el "triángulo notable" con ángulos de 45º y 90º (triángulo rectángulo-isósceles): $r = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$



Entonces, un grado en este paralelo mide $\frac{40'000 \cdot \sqrt{2}}{360 \cdot 2}$ km, y los 550 km corresponden a $\frac{550 \cdot 360 \cdot \sqrt{2}}{40'000} = 7º$.

Ya que la Tierra necesita 4 minutos para rotar un grado, la diferencia en la hora local es 7·4 = 28 minutos.

Unidad 74: Problemas diversos de repetición e investigación

2) En un año normal, enero coincide con octubre. En un año bisiesto, enero con julio. (Existen algunos otros pares de meses que coinciden en los días de la semana, pero no en el número de días.)
Si contamos un "año" como cualquier intervalo de 12 meses (sin empezar necesariamente en enero), entonces coinciden también:
- Mayo con enero del año siguiente;
- y agosto, septiembre y octubre con mayo, junio y julio (respectivamente) del año siguiente.
- O diciembre con marzo del año siguiente, si éste es un año bisiesto.

3.a) 2030. (Al calcular los días de la semana, ¡toma en cuenta los años bisiestos!)
En 2024, que es un año bisiesto, los días coinciden para los meses de marzo a diciembre; pero no para enero y febrero, entonces no es una solución.
b) 2048 (28 años más tarde). Eso se puede descubrir con un razonamiento sencillo: Tiene que ser un año bisiesto (como 2020), entonces la diferencia tiene que ser un múltiplo de 4. Y la semana tiene 7 días, entonces vuelven a coincidir después de 7 años bisiestos, o sea después de 4·7=28 años.
Este razonamiento vale para todos los intervalos que no encierran un año que es divisible entre 100, pero no entre 400 (como p.ej. 2100); porque esos años no son bisiestos, y así se rompe la regularidad.

4) La expresión se factoriza $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$, o sea el producto de tres números consecutivos.
Necesariamente uno de ellos es un múltiplo de 3; entonces el producto es con seguridad divisible entre 3. Solamente queda examinar la divisibilidad entre 8. Hagamos una tabla de los 8 casos posibles para el primer factor (mod.8), y calculamos el producto (mod.8):

$n-1$	n	$n+1$	n^3-n (mod.8)
0	1	2	0
1	2	3	6
2	3	4	0
3	4	5	6
4	5	6	0
5	6	7	2
6	7	0	0
7	0	1	0

De los 8 casos, 5 son divisibles entre 8. Entonces la probabilidad es 5/8 = 0.625.

5) Se puede resolver como el problema anterior. Para examinar las propiedades de la última cifra, tenemos que calcular mod.10:

n	$n+1$	$n \cdot (n+1)$ (mod.10)
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

4 de los 10 casos son "favorables"; entonces la probabilidad es 4/10 = 0.4.

6) "El número que cuenta sus propios dígitos":

Primeramente podemos observar que la suma de los dígitos debe ser 10, porque el número contiene un total de 10 dígitos.

En consecuencia, las cifras no pueden ser grandes. Por ejemplo, ¿podría el número tener un 3 en la posición 3? Entonces contendría 3 veces la cifra 3. Poniéndola en las posiciones menores posibles, el número comenzaría con 33.3... Pero entonces contendría también 3 veces el 1; o sea 331311... – y con eso ya tenemos una suma de dígitos que es mayor a 10. Por tanto, el número puede a lo máximo contener 2 veces el 3.

Evalúa de manera similar: ¿Realmente funciona con 2 cifras 3? ¿Cuántas veces a lo máximo puede ocurrir el 3? ¿y el 2? ¿y el 1? Así, descartando sucesivamente las combinaciones imposibles, debes llegar a la solución. (Existe una única solución.)

---

7) La mesa inestable:

Observa el camino (vertical) que siguen las patas de la mesa al girarla. En particular, compara la situación actual con la situación después de un giro de 90 grados.

Si dificultas en imaginártelo, dibuja un "perfil de altura" del suelo, a lo largo del camino que siguen las patas al girar. Este camino es el mismo para todas las patas, y es circular. Puede contener toda clase de "montes" y "valles". Pero de todos modos, si en una posición una pata está "demasiado alta", y en otra posición la misma pata está "demasiado baja", ¿qué tiene que haber pasado "en el camino"? - Saca tus conclusiones.

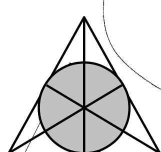
---

8) $x\cdot(x+17) = 6900$, $x = 75$, el otro lado = 92

9) $\boldsymbol{x}^2-\left(\frac{\boldsymbol{x}}{5}\right)^2 = 3042$, $\boldsymbol{x} = \frac{65}{2}\sqrt{3}$

10) $x\cdot(24-x) = 125$, $\boldsymbol{x} = 12\pm\sqrt{19}$

11.a) El radio del círculo es $^1/_3$ de la mediana (= altura), = $\boldsymbol{l}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$.



Área (círculo) = $\boldsymbol{l}^2\cdot\frac{3}{36}\pi$,

Área (triángulo) = $\boldsymbol{l}^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$.

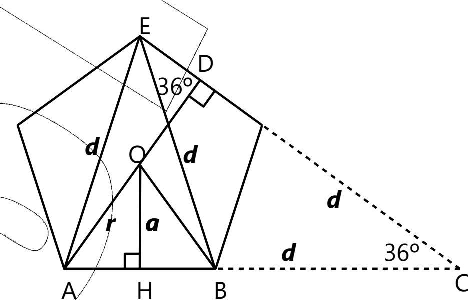
La proporción entre ambas, simplificada, es $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\approx 60.5\%$.

b) El radio del círculo es la apotema $\boldsymbol{l}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. El área del hexágono es igual a 6 triángulos equiláteros.

Resultado final: $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\approx 90.7\%$.

***c)** En la *Unidad 66* hemos visto que la diagonal del pentágono es $\boldsymbol{l}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Calcular la apotema requiere un poco de ingenio y perseverancia. Esta es una de varias posibilidades *(vea el siguiente dibujo)*:

Calculando ángulos, descubrimos que el triángulo BCE es isósceles. Entonces BC = $\boldsymbol{d}$.



Los triángulos ADC y AHO son semejantes. Entonces:

$\boldsymbol{a}:\frac{\boldsymbol{l}}{2} = (\boldsymbol{d}+\frac{\boldsymbol{l}}{2}) : \mathrm{AD}$; $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{l}/2)}{2\,\mathrm{AD}}$.

AD=EH (altura del pentágono), se puede calcular usando el triángulo rectángulo ADE:

$\mathrm{AD} = \sqrt{\boldsymbol{d}^2-\left(\frac{\boldsymbol{l}}{2}\right)^2} = \boldsymbol{l}\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+5}}{2}$. Desafortunadamente no se puede simplificar la raíz doble.

Remplazando en la fórmula anterior, racionalizando el denominador y simplificando, obtenemos:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{l}\frac{\sqrt{10\sqrt{5}+25}}{10}$.

Esto nos permite ahora calcular las áreas tanto del pentágono como del círculo inscrito. Resultado final:

$\frac{\pi\sqrt{10\sqrt{5}+25}}{25}\approx 86.5\%$.
